



سبقت (۰۵۱-۳۸۱۱۷)

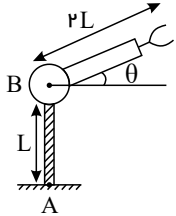
نام آزمون: مثلثات ویژه کنکور ۱۴۰۱

پشتیبانی شاگریان : ۰۹۰۱۴۲۵۳۰۵۰

منبع : سراسری تا ۱۴۰۰ و قلمچی تا ۹۸

مفاهیم مقدماتی مثلثات

۱ در شکل زیر، بازوی حرکت روبات به گونه‌ای قرار گرفته است که فاصله نوک گیره تا سطح زمین، نصف حداکثر مقدار ممکن است. فاصله تصویر نوک گیره بر روی زمین تا نقطه A ، چند برابر L است؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۸ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$



۲ $\frac{\sqrt{6}}{4}$
۴ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

۱ $\frac{\sqrt{15}}{4}$
۳ $\frac{\sqrt{15}}{2}$

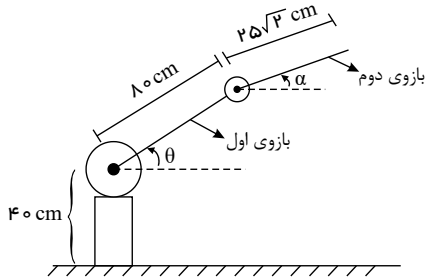
۲ دو ناظر A و B که در سطح زمین قرار دارند و با فاصله ۲۰ متر از هم در یک طرف برجی ایستاده‌اند، نوک این برج را با زاویه‌های 30° و 45° نسبت به افق می‌بینند. ارتفاع این برج چند متر است؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۸ (A, B و پای برج روی یک خط قرار دارند.)

۱ $10(\sqrt{3} + 1)$ ۲ $10(\sqrt{3} - 1)$ ۳ $20(\sqrt{3} + 1)$ ۴ $20(\sqrt{3} - 1)$

۳ شخصی با قد ۱٫۸۰ متر از روی پشت‌بام ساختمانی به ارتفاع ۷۵ متر بالگردی را که از روبه‌رو به آن شخص در حال نزدیک شدن است می‌بیند. اگر زاویه دید شخص نسبت به سطح افق 30° درجه و فاصله بالگرد تا شخص در راستای زاویه دید شخص در حدود $440/4$ متر باشد، بالگرد در چند متری از سطح زمین قرار دارد؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

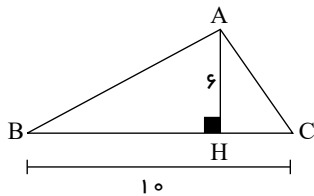
۱ $296/8$ ۲ $295/2$ ۳ 297 ۴ 222

۴ شکل زیر یک ربات است که از دو بازوی متصل به هم برای برداشتن اجسام استفاده می‌کند. این ربات برای برداشتن یک شیء، بازوی دوم خود را در حالت زاویه $\alpha = -45^\circ$ نسبت به افق قرار داده است. اگر بازوی اول در وضعیت افقی قرار گیرد، ارتفاع جسم از سطح زمین بر حسب سانتی‌متر کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸



- ۱ ۲۰
۲ ۱۵
۳ ۳۵
۴ ۱۰

۵ در شکل زیر اگر $3 \tan \hat{B} = 2 \tan \hat{C}$ باشد، آن گاه طول ضلع AB کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۹

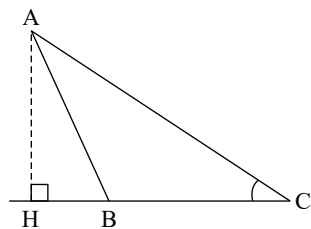


- ۱ $5\sqrt{2}$
۲ $4\sqrt{2}$
۳ $6\sqrt{2}$
۴ $7\sqrt{2}$

- ۱ $6\sqrt{2}$
۲ $5\sqrt{2}$
۳ $7\sqrt{2}$
۴ $4\sqrt{2}$

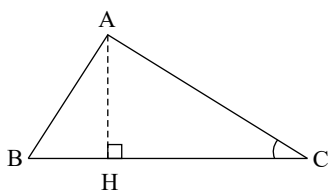
۶ در شکل زیر، فرض کنید $\sin C = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$ ، اندازه ارتفاع AH ، کدام است؟

سراسری - ۱۳۹۹



- ۱ ۳٫۲۵
۲ ۳٫۵
۳ ۳٫۶
۴ ۳٫۷۵

۷ در شکل زیر، $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $AC = 96$ ، اندازه ارتفاع AH ، کدام است؟ خارج از کشور - ۱۳۹۹



- ۱ ۵۶
۲ ۷۲
۳ ۴۸
۴ ۶۴

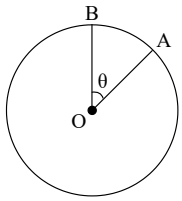
- ۱ ۴۸
۲ ۵۶
۳ ۶۴
۴ ۷۲



۸ مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۵، طول کمان AB برابر $\frac{\pi}{2}$ است. اندازه‌ی

زاویه‌ی θ بر حسب درجه کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷



۲۰° (۲)

۱۰° (۱)

۳۶° (۴)

۱۸° (۳)

۹ اگر $\sin x > 0$ و $\cot x < 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

چهارم (۴)

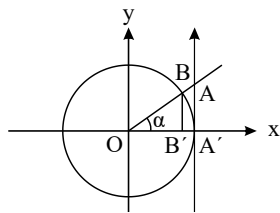
سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

۱۰ با توجه به دایره‌ی مثلثاتی زیر، اگر $AA' = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، مقدار OB' کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



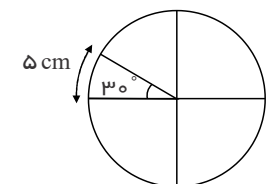
$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

$\sqrt{3}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۱۱ مساحت دایره‌ی مقابل کدام است؟

$\frac{800}{\pi}$ (۲)

$\frac{900}{\pi}$ (۱)

$\frac{620}{\pi}$ (۴)

$\frac{700}{\pi}$ (۳)

۱۲ در یک ساعت عقربه‌ای، نوک عقربه‌ی دقیقه‌شمار در مدت زمان ۴۰ دقیقه، مسافت ۶۰ سانتی‌متر را

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

طی کرده است. طول عقربه‌ی دقیقه‌شمار چند سانتی‌متر است؟

45π (۴)

$\frac{45}{\pi}$ (۳)

15π (۲)

$\frac{15}{\pi}$ (۱)

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۳ انتهای کمان‌های ۳ و $4\frac{5}{5}$ رادیان به ترتیب در کدام نواحی قرار دارند؟

سوم - چهارم (۴)

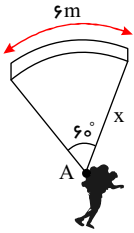
سوم - سوم (۳)

دوم - سوم (۲)

دوم - دوم (۱)

۱۴) مطابق شکل، یک چتر نجات به حالت دایره‌ای در هنگام پرواز به اندازه 60° درجه باز شده است.

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



مقدار x چند متر است؟ (نقطه A را مرکز دایره فرض کنید).

۱۸π (۲)

$\frac{18}{\pi}$ (۴)

$\frac{\pi}{10}$ (۱)

10π (۳)

۱۵) در یک مثلث قائم‌الزاویه، اختلاف دو زاویه حاده برابر با 18° است. کوچک‌ترین زاویه مثلث چند

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

رادیان است؟

$\frac{2\pi}{5}$ (۴)

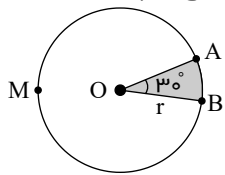
$\frac{3\pi}{10}$ (۳)

$\frac{\pi}{5}$ (۲)

$\frac{\pi}{10}$ (۱)

۱۶) در شکل مقابل، محیط ناحیه هاشورخورده $12 + \pi$ است. در این صورت طول کمان $\widehat{AMB}$ کدام

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



8π (۲)

11π (۴)

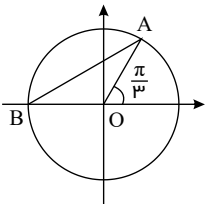
9π (۱)

6π (۳)

۱۷) اگر A نقطه متناظر با زاویه $\frac{\pi}{3}$ روی دایره مثلثاتی باشد، نسبت طول کمان AB به طول پاره خط

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

AB کدام است؟



$2\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ (۱)

$2\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ (۳)

منتأ - ۱۳۹۲

۱۸) اگر $\frac{3\pi}{8} < \alpha \leq \frac{5\pi}{8}$ و $\tan 2\alpha = \frac{-m+1}{2}$ باشد، حدود m کدام است؟

$[-1, 3]$ (۴)

$[-3, 1]$ (۳)

$(-1, 3]$ (۲)

$(-3, 1]$ (۱)



۱۹ کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$\sin(-4) < \cos(-2)$ (۴)
 $\sin 3 < \cos(-1)$ (۳)
 $\cos 2 > \sin 1$ (۲)
 $\sin 4 > \cos(-1)$ (۱)

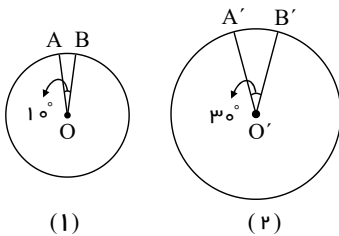
۲۰ اگر $\cos x + \sqrt{\cos x} = \sin x$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

(۱) اول
 (۲) دوم
 (۳) اول و چهارم
 (۴) دوم و سوم

۲۱ مطابق شکل، اگر مساحت دایره (۲) سه برابر مساحت دایره (۱) باشد، حاصل $\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



- (۱) $\sqrt{3}$
 (۲) $3\sqrt{3}$
 (۳) ۳
 (۴) ۴

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۲۲ اگر $20^\circ < \theta < 50^\circ$ باشد و $\sin 3\theta = \frac{m-1}{2}$ ، حدود m کدام است؟

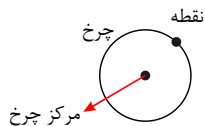
(۱) (۲, ۳)
 (۲) (۲, ۳)
 (۳) (۲, ۳)
 (۴) [۲, ۳]

۲۳ طول کمانی که یک نقطه روی یک چرخ دوار به شعاع $\frac{1}{\pi}$ متر در هر ساعت طی می‌کند برابر با $2,5$

متر است. اگر این نقطه نسبت به مرکز چرخ به اندازه ۹۰۰ درجه دوران کرده و سپس از کار بایستد، این

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

چرخ جمعاً چند ساعت چرخیده است؟



- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۵



۲۴) نقطه A روی محیط بیرونی چرخ کامیونی که با سرعت ثابت $60 \frac{km}{h}$ در حال حرکت است، قرار دارد. این نقطه پس از گذشت ۱ دقیقه n دور به علاوه $\frac{2}{3}$ دور کامل را طی می‌کند. n کدام است؟ (شعاع

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

چرخ ۱ متر است و $\pi \simeq 3$)

۱۶۶ (۴)

۱۹۰ (۳)

۱۳۳ (۲)

۱۶۷ (۱)

۲۵) اگر $\alpha = \beta - \gamma$ ، $\beta = 60^\circ$ و $\gamma = -3\pi$ رادیان باشند، آنگاه انتهای کمان زاویه α در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

۲۶) طول کمان زاویه مرکزی $\frac{\pi}{3}$ رادیان در دایره C با طول کمان زاویه مرکزی $\frac{\pi}{12}$ رادیان در دایره

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

 C' برابر است. نسبت مساحت دایره C به مساحت دایره C' کدام است؟

۱۶ (۴)

 $\frac{1}{16}$ (۳)

۴ (۲)

 $\frac{1}{4}$ (۱)

۲۷) در مدت ۴۸ دقیقه، عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار، در مجموع چند رادیان طی می‌کنند؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

 $\frac{28\pi}{15}$ (۴) $\frac{26\pi}{15}$ (۳) $\frac{9\pi}{5}$ (۲) $\frac{8\pi}{5}$ (۱)

۲۸) اگر اندازه یک زاویه برحسب رادیان ۳ برابر شود به اندازه آن زاویه برحسب درجه، 60° اضافه می‌شود. اندازه زاویه اولیه برحسب رادیان کدام است؟

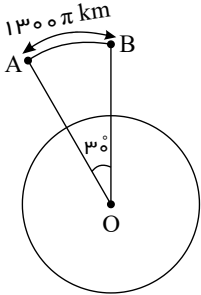
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

 $\frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{12}$ (۱)



۲۹ ماهواره ای در یک مدار دایره‌ای به دور زمین در حال حرکت است. اگر این ماهواره مسافتی معادل ۱۳۰۰π کیلومتر را طی کند، با توجه به شکل، ماهواره در چه فاصله‌ای از سطح زمین برحسب کیلومتر در حال حرکت است؟ (شعاع زمین ۶۴۰۰ کیلومتر است).

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۱۴۰۰ (۱)

$\frac{۱۳۰\pi}{۳}$ (۲)

۷۸۰۰ (۳)

$\frac{۱۴۹\pi}{۳}$ (۴)

۳۰ چرخ و فلکی ۴۰ کابین دارد و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند. اگر شخصی در ابتدا در کابین شماره ۵ باشد، پس از دوران به اندازه $\frac{۴۳\pi}{۱۰}$ رادیان، نسبت به حالت اولیه در موقعیت کدام کابین قرار می‌گیرد؟ (فاصله بین کابین‌ها یکسان است و شماره‌بندی آن‌ها به ترتیب و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌باشد).

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۸ (۱)

۳۱ در مدت زمانی معین، نوک عقربه دقیقه‌شمار یک ساعت عقربه‌ای با طول ۸ سانتی‌متر، ۱۶π سانتی‌متر مسافت را طی می‌کند. در این مدت زمان، نوک عقربه ساعت‌شمار با طول ۶ سانتی‌متر، چه مسافتی را برحسب سانتی‌متر طی می‌کند؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۲π (۴)

۶π (۳)

۴π (۲)

π (۱)

۳۲ کدام یک از مقادیر زیر نسبت به سایر گزینه‌ها، کوچک‌تر است؟ (زوایا برحسب رادیان هستند).

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

$\cos ۸$ (۴)

$\cos ۶$ (۳)

$\cos ۲$ (۲)

$\cos ۱$ (۱)



۳۳) اگر α در محدوده 30° تا 120° تغییر کند، $\sin \alpha$ در بازه $[a, b]$ قرار می‌گیرد. مقدار $b - a$ کدام

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

است؟

۴) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

۲) $\frac{1}{2}$

۱) ۱

۳۴) اندازه زاویه‌ای که عقربه دقیقه‌شمار بین دو زمان خاص طی می‌کند، $\frac{3\pi}{11}$ رادیان است. اندازه

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

زاویه‌ای که عقربه ساعت‌شمار در این مدت طی می‌کند، چند رادیان است؟

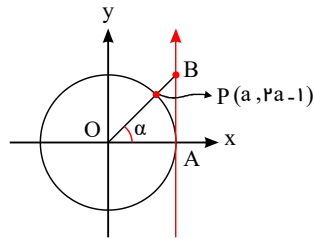
۴) $\frac{3\pi}{22}$

۳) $\frac{\pi}{22}$

۲) $\frac{\pi}{44}$

۱) $\frac{3\pi}{44}$

۳۵) با توجه به دایره مثلثاتی زیر، مساحت مثلث AOB چقدر است؟ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۲) $\frac{3}{4}$

۱) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{3}{8}$

۳۶) حاصل عبارت $A = 2[\sin 8 - \sin 9] + [\cos 10]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۴) -۳

۳) ۳

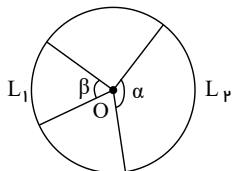
۲) -۱

۱) ۱

۳۷) اگر در شکل زیر حاصل ضرب طول کمان‌های L_1 و L_2 برابر $\frac{\pi}{9}$ مساحت دایره باشد و $\alpha = 4\beta$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

آنگاه مثلثی با دو زاویه α و β از کدام نوع است؟ (O مرکز دایره است.)



۲) قائم الزاویه

۱) متساوی الساقین

۴) هیچ کدام

۳) قائم الزاویه و متساوی الساقین



اتحادهای مثلثاتی

۳۸ اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{1}{\sin x} - \sin x$ ، $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$ کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۸

$$\cos x \quad (۴)$$

$$\cos^2 x \quad (۳)$$

$$-\cos x \quad (۲)$$

$$-\cos^2 x \quad (۱)$$

۳۹ اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $\sqrt{1 + \tan^2 x} (2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x)$ کدام است؟

سراسری - ۱۳۹۸

$$-\cos x \quad (۴)$$

$$-\sin x \quad (۳)$$

$$\cos x \quad (۲)$$

$$\sin x \quad (۱)$$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۴۰ اگر $7x = \frac{\pi}{2}$ باشد، حاصل $\frac{\cos x \sin 2x \tan 3x}{\cot 4x \cos 5x \sin 6x}$ کدام است؟

$$3\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{7} \quad (۳)$$

$$\text{صفر} \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

۴۱ اگر $3 = 2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 7 \cos^2 x$ باشد، آن گاه مجموع مقادیر ممکن برای

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$\tan x$ کدام است؟

$$3 \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$-3 \quad (۲)$$

$$-۱ \quad (۱)$$

۴۲ اگر $\tan x < ۱$ باشد و $\tan x + \cot x = \frac{5}{2}$ ، آن گاه مقدار مثبت $\sin x$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (۱)$$

سراسری - ۱۴۰۰

۴۳ اگر $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$ باشد حاصل $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ کدام است؟

$$\frac{91}{105} \quad (۴)$$

$$\frac{16}{105} \quad (۳)$$

$$-\frac{16}{105} \quad (۲)$$

$$-\frac{91}{105} \quad (۱)$$



منبع قلم چی - ۱۳۹۸

(۴۴) اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ باشد، عبارت $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}{\sin \beta}$ با کدام گزینه زیر برابر است؟

- ۱ (۱) -1 (۲) $\tan \alpha$ (۳) $-\tan \alpha$ (۴)

سراسری - ۱۳۹۸

(۴۵) حاصل عبارت $\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

خارج از کشور - ۱۳۹۸

(۴۶) حاصل عبارت $\tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3}$ کدام است؟

- ۱ (۱) -1 (۲) صفر (۳) 1 (۴) $\sqrt{3}$

سراسری - ۱۳۷۱

(۴۷) اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

- ۱ (۱) 5 (۲) 1 (۳) -3 (۴) -4

(۴۸) به ازای کدام مقدار x تساوی $\cos(3x + \frac{\pi}{12}) + \cos(\frac{\pi}{6} - x) = 0$ برقرار است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱ (۱) $\frac{3\pi}{8}$ (۲) $\frac{3\pi}{16}$ (۳) $\frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{\pi}{16}$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

(۴۹) حاصل عبارت $\frac{\sin(75^\circ) + \cos(-42^\circ)}{2 \tan(-315^\circ)}$ با مقدار کدام گزینه برابر است؟

- ۱ (۱) $\cos(21^\circ)$ (۲) $\sin(21^\circ)$ (۳) $\cos(27^\circ)$ (۴) $\sin(15^\circ)$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

کدام است؟

- $$\begin{array}{r} 2 \\ - 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ - 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ - 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$$

- $\circ/48$ (4) $\circ/27$ (3) $- \circ/52$ (2) $- 1/23$ (1)

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

A کدام است؟

- $$\frac{\mathfrak{r}\alpha}{\mathfrak{r}-\mathfrak{r}\alpha} \quad \textcircled{\mathfrak{r}} \qquad \frac{\mathfrak{r}\alpha}{\mathfrak{r}-\mathfrak{r}\alpha} \quad \textcircled{\mathfrak{r}} \qquad \frac{\mathfrak{r}\alpha}{\mathfrak{r}-\mathfrak{r}\alpha} \quad \textcircled{\mathfrak{r}} \qquad \frac{-\mathfrak{r}\alpha}{\mathfrak{r}+\mathfrak{r}\alpha} \quad \textcircled{\mathfrak{r}}$$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

است؟ (x در ربع اول قرار دارد).

- $$\frac{\sqrt{x}}{x} \quad \sqrt{x} \quad \frac{\sqrt{x}}{x} \quad \sqrt{x}$$

سراسری - ۱۳۹۸

- $$\frac{1}{2} \text{ (f)} \qquad \frac{1}{2} \text{ (g)} \qquad -\frac{1}{2} \text{ (h)} \qquad -\frac{1}{2} \text{ (i)}$$



منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۵۵ مقدار عبارت $\frac{2 \sin 20^\circ + \cos 29^\circ}{\sin 16^\circ + 2 \cos 7^\circ}$ کدام است؟

۱ (۴)

-۳ (۳)

 $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۱)

۵۶ اگر $\cos \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ و انتهای کمان θ در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\tan(\frac{3\pi}{2} - \theta)$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

کدام است؟

 $-\frac{1}{3}$ (۴)

۳ (۳)

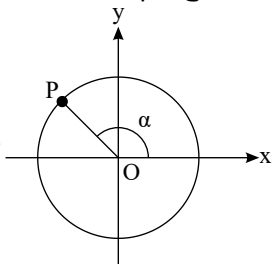
 $\frac{1}{3}$ (۲)

-۳ (۱)

۵۷ با توجه به شکل زیر اگر $P(-\frac{1}{3}, y)$ و طول OP برابر یک واحد باشد، حاصل

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$A = 3 \sin(\pi + \alpha) + 2 \tan^2 \alpha$ کدام است؟

 $16 - 2\sqrt{2}$ (۲) $16 + 2\sqrt{2}$ (۱) $8 - 3\sqrt{2}$ (۴) $8 + 3\sqrt{2}$ (۳)

۵۸ نقطه $P(x, y)$ روی دایره مثلثاتی را نسبت به مبدأ قرینه می‌کنیم تا نقطه P' به دست آید. در این

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

صورت کدام نسبت مثلثاتی مربوط به نقاط P و P' باهم برابر است؟ ($x, y \neq 0$)

هیچ کدام (۴)

تانژانت (۳)

کسینوس (۲)

سینوس (۱)

۵۹ اگر $\sin(\pi + x) = \frac{1}{2} + \sin(\pi - x)$ و انتهای کمان x در ناحیه سوم باشد، حاصل

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$\cot(\frac{\pi}{2} + x)$ کدام است؟

 $-\sqrt{15}$ (۴) $\sqrt{15}$ (۳) $-\frac{1}{\sqrt{15}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{15}}$ (۱)



۶۰ حاصل عبارت $A = \tan 2^\circ + \tan 4^\circ + \tan 6^\circ + \dots + \tan 18^\circ$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱ (۴)

۲ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3} + 1$

۳ (۳) -۱

۱ (۱) صفر

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۶۱ مقدار $\sin 451^\circ$ با کدام گزینه زیر برابر نیست؟

۴ (۴) $\cos(-\frac{\pi}{180})$

۳ (۳) $\sin 631^\circ$

۲ (۲) $-\sin 269^\circ$

۱ (۱) $\cos 1^\circ$

۶۲ با توجه به تساوی $\frac{\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) - 2\sin(\alpha - 3\pi)}{3\sin(\alpha - \frac{3\pi}{2})} = 2$ مقدار $\cot \alpha$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۴ (۴) $\frac{1}{3}$

۳ (۳) ۳

۲ (۲) $\frac{1}{2}$

۱ (۱) ۲

۶۳ اگر $\cot 80^\circ = \frac{2}{5}$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\cos 26^\circ - \cos 55^\circ}{\sin 8^\circ + \sin 73^\circ}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۴ (۴) $\frac{1}{2}$

۳ (۳) ۱

۲ (۲) $\frac{2}{3}$

۱ (۱) $\frac{3}{2}$

۶۴ اگر $2\cos(\pi - x) + \sin(\frac{\pi}{2} + x) < 0$ و $\tan(\frac{\pi}{2} - x) - \tan(\frac{\pi}{2} + x) > 0$ باشد،

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

انتهای کمان x در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

۴ (۴) چهارم

۳ (۳) سوم

۲ (۲) دوم

۱ (۱) اول

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۶۵ حاصل عبارت $\sin(-\frac{7\pi}{6}) + 2\tan(\frac{25\pi}{4}) - 3\cos(\frac{124\pi}{3})$ کدام است؟

۴ (۴) ۳

۳ (۳) ۴

۲ (۲) صفر

۱ (۱) ۱

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۶۶ اگر $x = \sin 35^\circ$ باشد، آن گاه حاصل $\frac{\sin 215^\circ + \cos 125^\circ}{\tan 325^\circ - \cot 235^\circ}$ کدام است؟

۴ (۴) $\sqrt{1+x^2}$

۳ (۳) $x\sqrt{1+x^2}$

۲ (۲) $\sqrt{1-x^2}$

۱ (۱) $x\sqrt{1-x^2}$



۶۷) برای $-\frac{\pi}{18} < \frac{x - \pi}{3} < \frac{\pi}{24}$ داریم: $\cos 2x = 2m - 1$ ، در این صورت حدود m کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) $(\frac{3}{4}, 1]$ ۲) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ ۳) $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{2}+2}{4})$ ۴) $(0, 1]$

۶۸) اگر $\cos(\frac{7\pi}{2} - x) + \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) $\frac{23}{54}$ ۲) $-\frac{23}{54}$ ۳) $\frac{23}{27}$ ۴) $-\frac{23}{27}$

۶۹) اگر $\log(\sin \frac{4\pi}{5}) - \log(\cos 324^\circ) + \log A = 0$ باشد، A کدام می تواند باشد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) $\tan 36^\circ$ ۲) $\tan 54^\circ$ ۳) $\cot 18^\circ$ ۴) $\cot 72^\circ$

۷۰) اگر انتهای زاویه α در ربع اول دایره مثلثاتی و $\frac{\sin(\alpha + \frac{3\pi}{2}) + 2\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 3\cos(2\pi + \alpha)} = 2$ باشد،

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

- ۱) $\frac{4}{17}$ ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{4}{\sqrt{65}}$ ۴) $\frac{4}{\sqrt{13}}$

۷۱) تابع $f(x) = a + b \cos x$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ دارای بیش ترین مقدار $\frac{3}{2}$ و دارای کم ترین مقدار $\frac{1}{2}$ باشد،

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

است. در این صورت $f(\frac{5\pi}{3})$ کدام است؟ ($b > 0$)

- ۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $1 + \frac{\sqrt{3}}{4}$



۷۲) اگر $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta)} = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\frac{\sin(\pi - \theta) + 2 \cos(\pi + \theta)}{2 \sin(2\pi - \theta) + \cos(2\pi + \theta)}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

تعیین نشده ۴

۳ $-\frac{4}{5}$ ۲ $-\frac{5}{4}$

۱ صفر

۷۳) حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = 0.28$ ، کدام است؟

سراسری - ۱۳۹۴

۴ $\frac{16}{9}$ ۳ $\frac{9}{16}$ ۲ $-\frac{9}{16}$ ۱ $-\frac{16}{9}$

۷۴) حاصل عبارت $\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ}$ با فرض $\tan 20^\circ = 0.4$ ، کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۴

۴ $\frac{5}{8}$ ۳ $\frac{7}{3}$ ۲ $\frac{3}{4}$ ۱ $-\frac{3}{4}$

۷۵) حاصل عبارت $\tan(30^\circ) \cos(210^\circ) + \tan(480^\circ) \sin(840^\circ)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده

سراسری - ۱۳۹۹

بر حسب درجه هستند.)

۴ ۲

۳ ۱

۲ صفر

۱ $-\frac{1}{2}$

۷۶) حاصل عبارت $\tan(285^\circ) \tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ) \cos(255^\circ)$ ، کدام است؟ (اعداد داده

خارج از کشور - ۱۳۹۹

شده بر حسب درجه هستند.)

۴ $-\cos^2(15^\circ)$ ۳ $-\sin^2(15^\circ)$ ۲ $\cos^2(15^\circ)$ ۱ $\sin^2(15^\circ)$

۷۷) اگر $\frac{\tan x - \cot x}{\cos 2x} = 5$ باشد، آنگاه حاصل $\cos(\frac{\pi}{2} + 2x)$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۴ $-\frac{2}{5}$ ۳ $-\frac{1}{5}$ ۲ $\frac{2}{5}$ ۱ $\frac{1}{5}$



۷۸) اگر $\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{3}{2}$ باشد، آن گاه حاصل $\sin 2\alpha$ برابر با کدام گزینه است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① $\frac{12}{13}$ ② $-\frac{12}{13}$ ③ $\frac{5}{13}$ ④ $-\frac{5}{13}$

۷۹) حاصل عبارت $\frac{\sin 2^\circ \sin 5^\circ \sin 7^\circ}{\sin 8^\circ}$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{6}$

۸۰) اگر $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① ۲۷ ② ۱۸ ③ ۱۲ ④ ۹

۸۱) اگر $\cos^4 x = 1 + \sin^4 x$ ، آنگاه حاصل $\cos x$ کدام می تواند باشد؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ① صفر ② -۱ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$

۸۲) اگر $\frac{3 \sin x - 4 \cos x}{\sin x + 6 \cos x} = 1$ مقدار $\cot 2x$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ① $-\frac{24}{5}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $-\frac{5}{12}$ ④ $-\frac{12}{5}$

۸۳) اگر $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{4}$ باشد، مقدار $\cos 4x$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① $-\frac{3}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{7}{8}$ ④ $\frac{7}{8}$

۸۴) اگر $1 + \sin 22^\circ = m$ باشد، $\sin^2 25^\circ$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① m ② $\frac{m}{2}$ ③ $2m$ ④ $1 - m$



منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۸۵) حاصل $\sin 15^\circ \times \cos 75^\circ - \frac{1}{2}$ کدام است؟

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۸۶) اگر $\sin(\pi + x) - \sin x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\sin(\frac{\pi}{2} + 2x)$ کدام است؟

- ① $\frac{3}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ $-\frac{7}{8}$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۸۷) اگر $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 3$ باشد، آن گاه حاصل $\sin \theta \cos \theta$ کدام است؟

- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{5}{4}$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۸۸) اگر $\alpha = 75^\circ$ باشد، مقدار $\cos^3 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha \cos \alpha$ کدام است؟

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $-\frac{\sqrt{3}}{8}$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۸۹) اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ، آنگاه مقدار $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$ کدام است؟

- ① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{3}{8}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۹۰) اگر $\sin 2\theta = a$ باشد، حاصل $1 - \cos^4 \theta - \sin^2 \theta$ کدام است؟

- ① $\frac{a^2}{4}$ ② $4a^2$ ③ $\frac{a^2}{2}$ ④ $2a^2$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۹۱) اگر $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$ باشد، حاصل $\sqrt{\tan x + \cot x}$ چقدر است؟

- ① $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ③ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{3}$



منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۹۲) اگر $\cos x - \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{4 \sin x}$ حاصل $\sin 4x$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{2} - 1$ ۴) $1 - \sqrt{2}$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۹۳) مقدار عبارت $\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{16}$

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۹۴) حاصل $\tan^4 \frac{\pi}{8} - \cot^4 \frac{\pi}{8}$ چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

- ۱) ۱۲ ۲) -۱۲ ۳) ۲۴ ۴) -۲۴

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۹۵) حاصل $\sin^3 \frac{\pi}{12} + \cos^3 \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{3\sqrt{6}}{8}$ ۲) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\frac{3\sqrt{6}}{16}$ ۴) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$

عبارت

مقدار ۹۶)

$$A = \left(1 + \cos \frac{\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{7\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{5\pi}{8}\right)$$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۹۷) اگر $\sin 2x - \cos 2x = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\cos 2x}{\tan x + \cot x}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{36}$ ۳) $\frac{1}{36}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$



منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۹۸ اگر $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 2$ باشد، آنگاه مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

- ۱) $\frac{6}{5}$ ۲) $\frac{8}{5}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

خارج از کشور - ۱۳۹۵

۹۹ اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$ کدام است؟

- ۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

سراسری - ۱۳۹۶

۱۰۰ حاصل $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$ ، کدام است؟

- ۱) 2 ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{3}$

سراسری - ۱۳۹۵

۱۰۱ اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{3}{4}$

سراسری - ۱۳۹۶

۱۰۲ اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ ، کدام است؟

- ۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

خارج از کشور - ۱۳۹۴

۱۰۳ اگر $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$ باشد، مقدار $\tan 2x$ ، کدام است؟

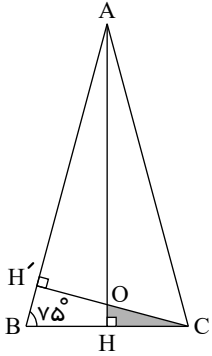
- ۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$



۱۰۴ در شکل زیر مثلث ABC متساوی الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC

کدام است؟

سراسری - ۱۴۰۰



(۲) $\frac{4}{3}$

(۴) $\frac{9}{2(7+4\sqrt{3})}$

(۱) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{18}{7+4\sqrt{3}}$

۱۰۵ اگر $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$ مقدار $f(\frac{\pi}{36})$ کدام

است؟

سراسری - ۱۴۰۰

(۴) $\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$

(۳) $\frac{6+\sqrt{3}}{16}$

(۲) $\frac{6-\sqrt{3}}{16}$

(۱) $\frac{6-3\sqrt{3}}{16}$

۱۰۶ اگر زاویه α در ناحیه سوم مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ باشد مقدار

سراسری - ۱۴۰۰

کدام است؟ $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$

(۴) $-\frac{1056}{175}$

(۳) $\frac{96}{175}$

(۲) $\frac{1056}{175}$

(۱) $-\frac{96}{175}$

۱۰۷ اگر $f(\alpha) = 4 \sin(\alpha) \cos(2\alpha) + 2 \sin(\alpha)$ باشد مقدار $f(\frac{41\pi}{9})$ کدام است؟

سراسری - ۱۴۰۰

(۴) -۱

(۳) ۱

(۲) $\sqrt{3}$

(۱) $-\sqrt{3}$



معادلات مثلثاتی

فرض ۱۰۸ کنید A مجموعه جواب‌های معادله مثلثاتی

$$(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha))(1 + \cos(8\alpha)) = \frac{1}{8} \quad \text{در بازه } [0, \pi] \text{ باشد ماکزیمم عضو}$$

سراسری - ۱۴۰۰

مجموعه A ، کدام است؟

۴ $\frac{8}{9}\pi$

۳ $\frac{7}{9}\pi$

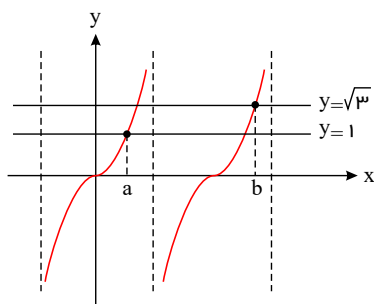
۲ $\frac{6}{7}\pi$

۱ $\frac{5}{7}\pi$

نمودار توابع مثلثاتی و دوره‌ی تناوب

شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \tan x$ را نشان می‌دهد. حاصل $b - a$ کدام است؟ ۱۰۹

منبع قلم‌چی - ۱۳۹۸



۲ $\frac{5\pi}{12}$

۴ $\frac{13\pi}{12}$

۱ $\frac{\pi}{12}$

۳ $\frac{7\pi}{12}$

اگر $f(x) = \sin x - \cos x$ و $g(x) = \sin x + \cos x$ ، آنگاه دوره تناوب تابع $f \cdot g$ کدام ۱۱۰

منبع قلم‌چی - ۱۳۹۸

است؟

۴ تابع متناوب نیست.

۳ $\frac{\pi}{2}$

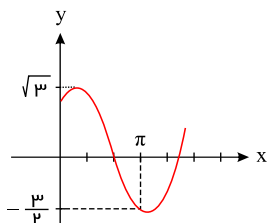
۲ π

۱ 2π



۱۱۱) شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟

سراسری - ۱۳۹۸



۳
۲

۲

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{3}$

۱۱۲) به‌ازای چند مقدار صحیح a ، دورهٔ تناوب دو تابع $y_1 = -2 \sin((a^2 + 2)x) + 3$ و

منبع قلم‌چی - ۱۳۹۸

$y_2 = -3 \cos 3ax - 2$ یکسان است؟

۴

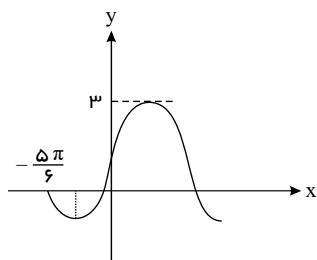
۳

۲

۱

۱۱۳) شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$

خارج از کشور - ۱۳۹۸



کدام است؟

۱٫۵

۲

۲٫۵

$1 + \sqrt{3}$

۱۱۴) نمودار تابع‌های $f(x) = 3 \sin 2x - 2$ و $g(x) = k$ در بازهٔ $(0, T)$ همدیگر را در دو نقطه

منبع قلم‌چی - ۱۳۹۸

قطع می‌کنند. حدود k کدام است؟

T دورهٔ تناوب تابع f است.)

$(-5, -2) \cup (-2, 1)$

$(-5, 1)$

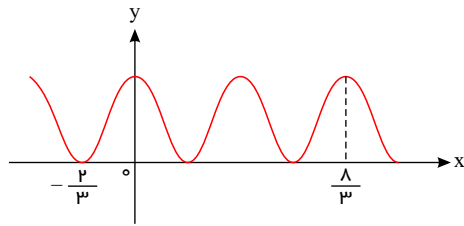
$(-7, -5) \cup (-5, -2)$

$(-2, 1) \cup (1, 5)$



۱۱۵) قسمتی از نمودار تابع $y = 2 + a \cos(b\pi x)$ به صورت زیر است. حاصل $|ab|$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۳ (۲)

۱/۳ (۴)

۱/۲ (۱)

۲ (۳)

۱۱۶) تابع $f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ با دامنه $(2, a)$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۸ (۴)

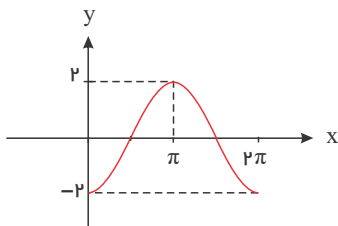
۶ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۱۱۷) شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = a \cos bx$ است. مقدار $a + b$ کدام می تواند باشد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



-۲ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

-۳ (۴)

۱۱۸) دوره تناوب تابع با ضابطه $y = 3 \sin cx - 2$ برابر π است. قدرمطلق مجموع مقادیر ماکسیمم و

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

مینیمم تابع با ضابطه $y = \pi \sin(-x) + c$ کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۱۱۹) اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ برابر T باشد، تابع f در بازه های $(0, \frac{T}{2})$ و

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$(\frac{T}{2}, T)$ به ترتیب چگونه است؟

نزولی - نزولی (۴)

نزولی - صعودی (۳)

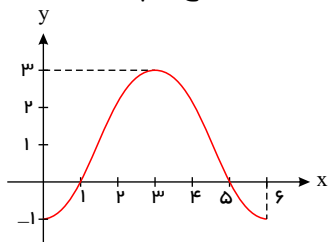
صعودی - نزولی (۲)

صعودی - صعودی (۱)



۱۲۰) اگر قسمتی از نمودار تابع $y = a + ۲ \sin(\pi(bx - \frac{1}{۲}))$ به صورت زیر باشد، حاصل $a - b$ کدام می تواند باشد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



$$\frac{۳}{۴} \quad \textcircled{۲}$$

$$\frac{1}{۲} \quad \textcircled{۴}$$

$$\frac{1}{۳} \quad \textcircled{۱}$$

$$\frac{۴}{۳} \quad \textcircled{۳}$$

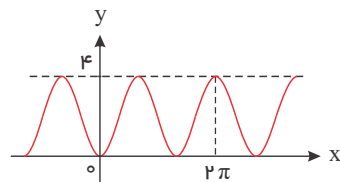
۱۲۱) دوره تناوب تابع $f(x) = \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x)$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$$\frac{\pi}{۴} \quad \textcircled{۴}$$

$$\frac{\pi}{۲} \quad \textcircled{۳}$$

$$\pi \quad \textcircled{۲}$$

$$۲\pi \quad \textcircled{۱}$$



منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۲۲) شکل زیر مربوط به کدام ضابطه می تواند باشد؟

$$y = -۲ \sin(\frac{۳}{۲}x) + ۲ \quad \textcircled{۲}$$

$$y = ۲ \cos(\frac{۲}{۳}x) - ۲ \quad \textcircled{۱}$$

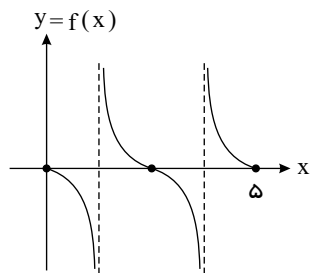
$$y = ۴ \sin(\frac{۲}{۳}x) \quad \textcircled{۴}$$

$$y = -۲ \cos(\frac{۳}{۲}x) + ۲ \quad \textcircled{۳}$$

۱۲۳) شکل مقابل، بخشی از نمودار تابع $f(x) = a \tan(b\pi x)$ را نشان می دهد. کدام گزینه می تواند

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

صحیح باشد؟



$$a > ۰, b = \frac{۲}{۵} \quad \textcircled{۲}$$

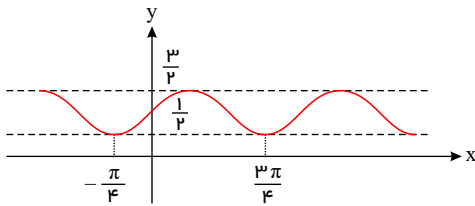
$$a \in \mathbb{R}, b = \pm \frac{۲}{۵} \quad \textcircled{۱}$$

$$a < ۰, b = \frac{۲}{۵} \quad \textcircled{۴}$$

$$a < ۰, b = -\frac{۲}{۵} \quad \textcircled{۳}$$



۱۲۴ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟ سراسری-۱۳۹۸



۳/۲ (۲)

۳ (۴)

۱ (۱)

۲ (۳)

۱۲۵ دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ کدام است؟ خارج از کشور-۱۳۹۸

π (۴)

۲ (۳)

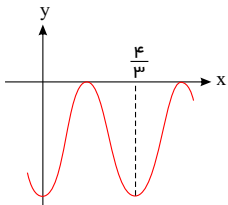
۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۱۲۶ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = -2 + a \cos \pi(1 + bx)$ است. در این صورت ab

منبع قلم‌چی-۱۳۹۷

کدام می‌تواند باشد؟ ($a > 0$)



۳ (۲)

۵ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۱)

$\frac{5}{2}$ (۳)

۱۲۷ اگر تابع $f(x) = 5 \sin 3(\frac{\pi}{2}x - c)$ به‌ازای $x = \frac{1}{2}$ ماکسیمم شود، طول نقطه مینیمم آن،

منبع قلم‌چی-۱۳۹۸

کدام می‌تواند باشد؟ (c ، عدد ثابت است.)

$\frac{4}{3}$ (۴)

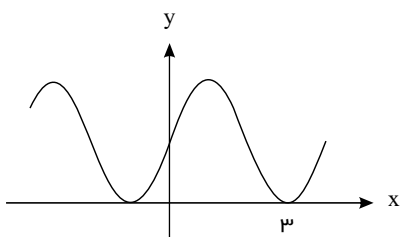
$\frac{11}{6}$ (۳)

$\frac{7}{6}$ (۲)

$-\frac{5}{6}$ (۱)

۱۲۸ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + \sin(b\pi x)$ به‌صورت زیر است، $a + b$ کدام است؟

منبع قلم‌چی-۱۳۹۷



۱ (۲)

۲ (۴)

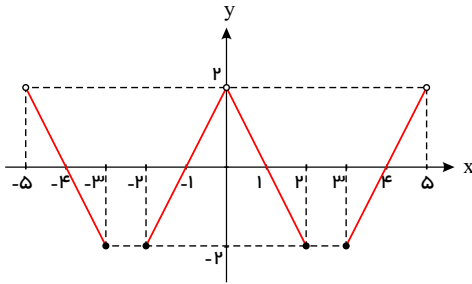
$\frac{1}{2}$ (۱)

$\frac{3}{2}$ (۳)



۱۲۹) قسمتی از نمودار تابع متناوب $y = f(x)$ به شکل زیر است. $f(128,1)$ کدام است؟

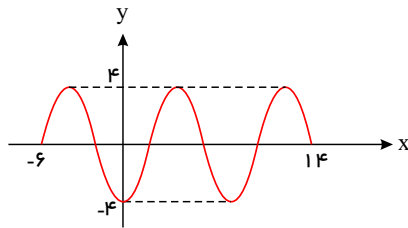
منبع قلم چی - ۱۳۹۸



- ۱) ۱٫۸
۲) -۱٫۸
۳) -۰٫۲
۴) تعریف نشده

۱۳۰) اگر شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(\pi + bx)$ باشد، مقدار $f(-\frac{32}{3})$ کدام است؟

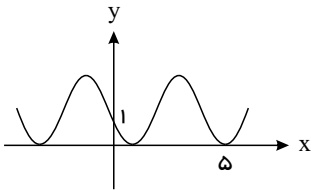
منبع قلم چی - ۱۳۹۸



- ۱) $2\sqrt{3}$
۲) $-2\sqrt{3}$
۳) ۲
۴) -۲

۱۳۱) قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - \cos(\pi(\frac{1}{2} + bx))$ به صورت زیر است. $a + b$ کدام است؟

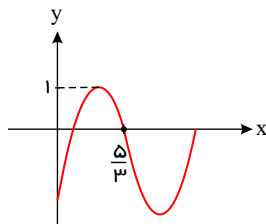
منبع قلم چی - ۱۳۹۷



- ۱) صفر
۲) ۱٫۵
۳) ۱
۴) ۰٫۵

۱۳۲) اگر قسمتی از نمودار $f(x) = a \sin(b\pi x) - 1$ به شکل زیر باشد، مقدار b کدام گزینه می تواند باشد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



- ۱) ۲
۲) -۲
۳) $\frac{3}{2}$
۴) $-\frac{1}{2}$



۱۳۳ کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = \sin(x - \frac{3\pi}{4}) - 2 \cos(\frac{7\pi}{4} + x)$ با دامنه $[-\frac{\pi}{4}, 2\pi]$ نادرست است؟

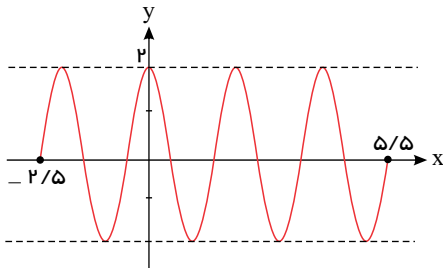
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱ نمودار، ۳ بار محور x ها را قطع می کند. ۲ اختلاف بیش ترین و کم ترین مقدار f برابر با ۶ است.

۳ نمودار f در بازه $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ بالای محور x ها قرار دارد. ۴ خط $y = -1$ در دو نقطه نمودار را قطع می کند.

۱۳۴ شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi(\frac{1}{2} + bx)$ است. حاصل ab کدام می تواند باشد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۱ ۴

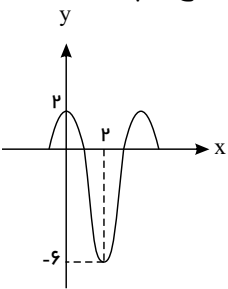
۲ ۱

۳ ۲

۴ ۳

۱۳۵ اگر نمودار زیر مربوط به تابع $y = a \sin \pi(\frac{1}{2} - bx) + c$ باشد، مقدار تابع به ازای $x = \frac{7}{3}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۱ $-2\sqrt{3} - 2$

۲ $2\sqrt{3} - 2$

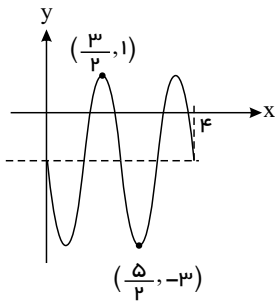
۳ -4

۴ $-3\sqrt{3}$



۱۳۶ شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos \pi \left(\frac{x}{2} + bx \right) + c$ است. حاصل abc کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
-۱ (۳)
-۲ (۴)

۱۳۷ تعداد نقاط تلاقی نمودار تابع $y = -3 \sin(2\pi x) + 1$ با خط $y = -1$ در بازه $[0, 1/5]$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۱ (۴)

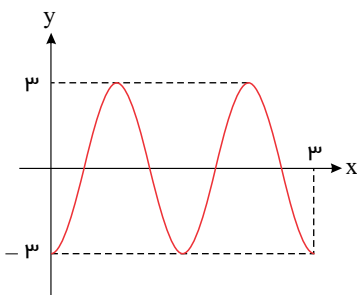
۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۱۳۸ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \left(\pi \left(\frac{x}{2} + bx \right) \right)$ را نشان می‌دهد. کم‌ترین مقدار $a + b$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹



$\frac{13}{4}$ (۲)

$-\frac{5}{4}$ (۴)

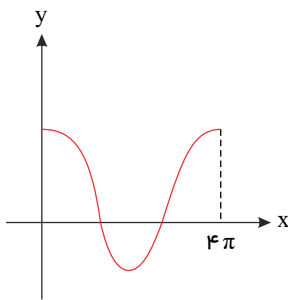
$-\frac{13}{4}$ (۱)

$\frac{5}{4}$ (۳)



۱۳۹ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ای به طول

سراسری-۱۳۹۶



کدام است؟ $x = \frac{16\pi}{3}$

۱ $-\frac{1}{2}$

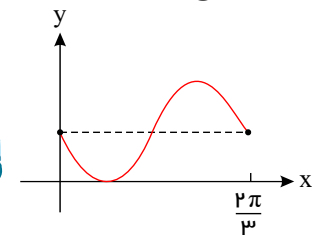
۲ $\frac{1}{2}$

۳ ۱

۴ صفر

۱۴۰ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ی $x = \frac{7\pi}{6}$

خارج از کشور-۱۳۹۶



۱ ۳

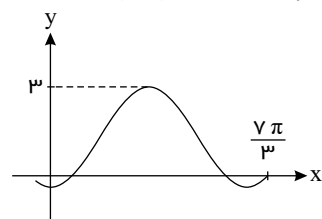
۲ $\frac{1}{2}$

۱ صفر

۴ ۲

۱۴۱ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin(\frac{\pi}{2} + x)$ است. مقدار b ، کدام است؟

سراسری-۱۳۹۹



۴ -۲

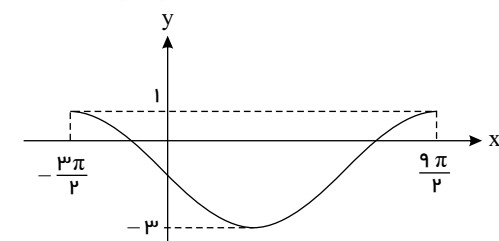
۳ -۱

۲ ۱

۱ ۲

۱۴۲ شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ را در یک بازه تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$

سراسری-۱۳۹۹



۲ -۳

۴ -۶

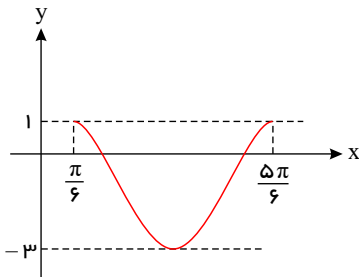
۱ -۲

۳ -۴

کدام است؟



۱۴۴ شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ در یک بازه تناوب
 است. مقادیر b و c ، کدام‌اند؟
 خارج از کشور - ۱۳۹۹



$$b = \frac{3}{2}, c = -1 \quad (4)$$

$$b = \frac{3}{2}, c = -2 \quad (3)$$

$$b = 3, c = -2 \quad (2)$$

$$b = 3, c = -1 \quad (1)$$

معادلات مثلثاتی

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۴۵ معادله $\sin^2 x = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

سراسری - ۱۳۹۷

۱۴۶ جواب کلی معادله $\tan x \tan 3x = 1$ ، کدام است؟

$$x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \quad (4)$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \quad (3)$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (2)$$

$$x = \frac{k\pi}{4} \quad (1)$$

خارج از کشور - ۱۳۹۷

۱۴۷ جواب کلی معادله $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ ، کدام است؟

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{5} \quad (4)$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{5} \quad (3)$$

$$x = \frac{2k\pi}{5} \quad (2)$$

$$x = \frac{k\pi}{5} \quad (1)$$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۴۸ معادله $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 3$ در بازه $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۴۹ معادله $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

$$6 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$



۱۵۱) معادله $\sin x (\tan x + \cot x) = 1$ چند جواب حقیقی در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۵۲) جواب کلی معادله $\tan 4x = \frac{1}{\tan(4x + \frac{\pi}{3})}$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{24}$ ۲) $x = \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{24}$ ۳) $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$ ۴) $x = \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{48}$

۱۵۳) مجموع جواب‌های معادله $\cos 3x = \cos 2x$ در بازه $(\pi, 3\pi)$ ، کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) 12π ۲) 10π ۳) 8π ۴) 6π

۱۵۴) مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $4 \sin x \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- ۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) 4π ۴) 5π سراسری - ۱۳۹۸

۱۵۵) جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ با شرط $\cos x \neq 0$ ، کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۸

- ۱) $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ ۲) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۳) $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۴) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۵۶) معادله $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

۱۵۷) جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{3}{2} \cos x - \sin^2 x = 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۳) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$



۱۵۸ جواب کلی معادله $\sin x \cos x - \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos \frac{4\pi}{3}$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ☐ ۱ $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$
☐ ۲ $k\pi + \frac{\pi}{4}$
☐ ۳ $k\pi + \frac{\pi}{8}$
☐ ۴ $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

۱۵۹ از معادله $(\cos 3x)(\cos \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \cos^2 x$ چند جواب برای x در فاصله $(0, 2\pi)$ به دست می آید؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ☐ ۱ ۶
 ☐ ۲ ۵
 ☐ ۳ ۴
 ☐ ۴ ۳

۱۶۰ معادله مثلثاتی $\frac{\cos 2x + 4 \sin x - 3}{\sin x - 1} = 3$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ☐ ۱ ۱
 ☐ ۲ ۲
 ☐ ۳ ۳
 ☐ ۴ ۴

۱۶۱ کدام یک، ریشه‌ای برای معادله $\cos 5x = 2 \cos^2 x - 1$ است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ☐ ۱ $\frac{3\pi}{7}$
☐ ۲ $\frac{\pi}{3}$
☐ ۳ $\frac{\pi}{7}$
☐ ۴ $\frac{4\pi}{7}$

۱۶۲ معادله $\sin x \cos^3 x - \cos x \sin^3 x = \frac{1}{12}$ در فاصله $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ☐ ۱ ۱
 ☐ ۲ ۲
 ☐ ۳ ۳
 ☐ ۴ ۴

۱۶۳ معادله $\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{5}{8} - \cos^2 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ☐ ۱ ۵
 ☐ ۲ ۴
 ☐ ۳ ۸
 ☐ ۴ ۳

۱۶۴ جواب کلی معادله $2 \sin^2 x = 1 - \cos(2x + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ☐ ۱ $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{16}$
☐ ۲ $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16}$
☐ ۳ $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
☐ ۴ $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$



۱۶۵) مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- ۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) 4π خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱۶۶) اگر جواب معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^3 x = \cos x$ به صورت $x = k\pi + \frac{i\pi}{4}$ باشد، مجموعه‌ی

مقادیر i کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ۱) $\{1, 2, 0\}$ ۲) $\{0, 1\}$ ۳) $\{1, 2, 3\}$ ۴) $\{1, 2\}$

۱۶۷) معادلهٔ $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - \sin 2x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۱۶۸) مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{8\sin^2 x}{1 + \tan^2 x} + 3\cos 2x = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- ۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 6π ۳) 2π ۴) 4π منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۶۹) معادلهٔ $\tan 2x = 3\tan x$ در بازهٔ $(0, \frac{5\pi}{2})$ چند جواب دارد؟

- ۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۹ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۷۰) مجموع جواب‌های متمایز معادلهٔ $\cos 2x + \cos^2 x + 4\sin x = 3$ در بازهٔ $[0, \pi]$ کدام

است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) 2π ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) π

۱۷۱) جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ ، کدام است؟ سراسری - ۱۳۹۶

- ۱) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲) $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ۳) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$



۱۷۲) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

سراسری-۱۳۹۴

$x = k\pi + \frac{\pi}{8}$ (۴)
 $x = k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۳)
 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۲)
 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۱)

۱۷۳) مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام

خارج از کشور-۱۳۹۶

است؟

5π (۴)
 $\frac{9\pi}{2}$ (۳)
 4π (۲)
 $\frac{14\pi}{3}$ (۱)

۱۷۴) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ ، کدام است؟

سراسری-۱۳۹۵

$x = k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۴)
 $x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۳)
 $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲)
 $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۱)

۱۷۵) تعداد جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $4\sin(3x)\cos(3x) = 1$ در بازه‌ی $[0, \frac{\pi}{2}]$ ، کدام است؟

خارج از کشور-۱۳۹۹

5 (۴)
 4 (۳)
 3 (۲)
 2 (۱)

۱۷۶) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

خارج از کشور-۱۳۹۴

$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴)
 $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳)
 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۲)
 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۱)

۱۷۷) جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 2x$ کدام است؟

خارج از کشور-۱۳۹۹

$x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ (۲)
 $x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ (۱)

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ (۴)
 $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ (۳)



۱۷۸) جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ با شرط $x \neq k\pi$ که در آن k یک

عدد صحیح است، کدام است؟

سراسری - ۱۳۹۹

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (۴)$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} \quad (۲)$$

$$x = \frac{k\pi}{3} \quad (۱)$$

۱۷۹) مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\tan(3x) \tan(x) = 1$ در بازهٔ $[\pi, 2\pi]$ ، کدام است؟

سراسری - ۱۳۹۹

$$\frac{11\pi}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{9\pi}{2} \quad (۳)$$

$$6\pi \quad (۲)$$

$$5\pi \quad (۱)$$

۱۸۰) تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2(x) - \sin^2(x) \cos(3x) = 1$ در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ کدام

سراسری - ۱۴۰۰

است؟

$$6 \quad (۴)$$

$$5 \quad (۳)$$

$$3 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

کاربرد مثلثات

۱۸۱) در یک متوازی‌الاضلاع، یکی از قطر‌ها دو برابر دیگری و زاویهٔ بین دو قطر 30° است. اگر

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

مساحت متوازی‌الاضلاع ۳۲ واحد مربع باشد، اندازهٔ قطر کوچک آن چه قدر است؟

$$8\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$8 \quad (۳)$$

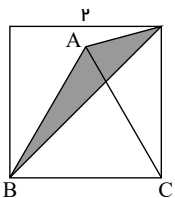
$$4\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$4 \quad (۱)$$

۱۸۲) مثلث متساوی‌الاضلاع ABC درون یک مربع به طول ضلع ۲ قرار گرفته است. مساحت مثلث

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

رنگی کدام است؟ $\left(\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}\right)$



$$\sqrt{3} - 1 \quad (۲)$$

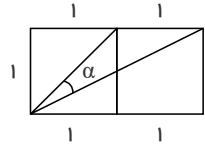
$$\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (۳)$$



منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۸۳ در مستطیل روبه‌رو، $\sin \alpha$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{10}}{5} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{10}}{10} \quad (1)$$

$$\frac{3\sqrt{10}}{10} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

۱۸۴ مساحت متوازی‌الاضلاعی که یکی از قطرهای آن ۱۲ و زاویه بین دو قطر ۱۲۰ درجه باشد، برابر

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۸ $\sqrt{3}$ است. اندازه قطر دیگر کدام است؟

$$4\sqrt{3} \quad (4)$$

$$12 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

۱۸۵ طول دو ضلع مثلثی به مساحت ۶ به صورت $a = 3\sqrt{2}$ و $b = 4$ و زاویه بین آن‌ها θ است. اگر θ را 75° کاهش و طول اضلاع a و b را $\sqrt{2}$ برابر کنیم، مساحت مثلث چند برابر می‌شود؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$$\sqrt{6} \quad (4)$$

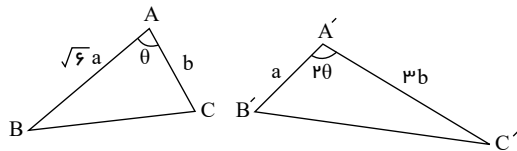
$$\sqrt{3} \quad (3)$$

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۱۸۶ اگر $\tan \theta = \sqrt{7}$ باشد، نسبت مساحت مثلث $A'B'C'$ به مساحت مثلث ABC کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



$$\sqrt{3} \quad (2)$$

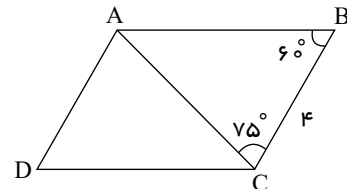
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$2 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

۱۸۷ در متوازی‌الاضلاع زیر، اگر $BC = 4$ باشد، در این صورت طول قطر AC برابر با کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹



$$2\sqrt{6} \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

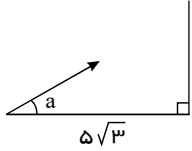
$$\frac{3\sqrt{6}}{2} \quad (4)$$

$$2\sqrt{5} \quad (3)$$



۱۸۸) مطابق شکل زیر، گلوله‌ای در فاصله $۵\sqrt{۳}$ متری از یک دیوار با سرعت $۱۰ \frac{m}{s}$ و با زاویه حاده α نسبت به سطح افقی پرتاب می‌شود. می‌دانیم مسافت افقی طی شده (d) بر حسب سرعت پرتاب گلوله (v) و زاویه پرتاب (α) از رابطه $d = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$ به دست می‌آید. حدود α کدام باشد تا گلوله قبل از رسیدن به زمین به دیوار برخورد کند؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

$$\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

۱۸۹) اندازه‌ی دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $۸\sqrt{۳}$ واحد است. این دو قطر با زاویه‌ی ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۶

$$۷۲ \quad (۴)$$

$$۶۴ \quad (۳)$$

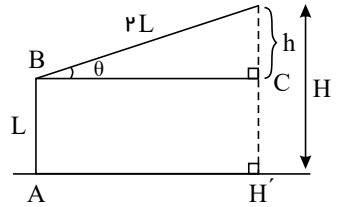
$$۵۴ \quad (۲)$$

$$۴۸ \quad (۱)$$

پاسخ نامه تشریحی

ابتدا ارتفاع نوک گیره این روبات تا سطح زمین را به صورت تابعی از θ می نویسیم:

$$h = 2L \sin \theta \Rightarrow H = L + 2L \sin \theta$$



می دانیم بیشترین مقدار ممکن زمانی رخ می دهد که $\sin \theta = 1$ باشد که در این صورت: $H = 3L$
پس طبق فرض، روبات در حالتی قرار دارد که:

$$H = \frac{3L}{2} \Rightarrow L + 2L \sin \theta = \frac{3L}{2} \Rightarrow 2L \sin \theta = \frac{L}{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

در نتیجه:

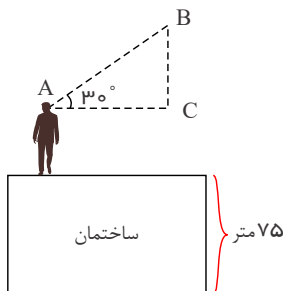
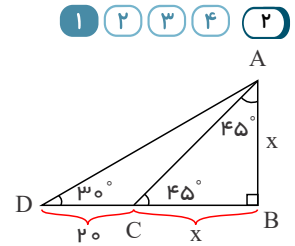
$$AH' = BC = 2L \cos \theta = 2L \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2} L$$

$$\triangle ABC : \hat{ACB} = \hat{CAB} = 45^\circ \Rightarrow AB = BC = x$$

$$\triangle ADB : \tan 30^\circ = \frac{AB}{DB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{20 + x}$$

$$\Rightarrow 3x = 20\sqrt{3} + \sqrt{3}x \Rightarrow (3 - \sqrt{3})x = 20\sqrt{3}$$

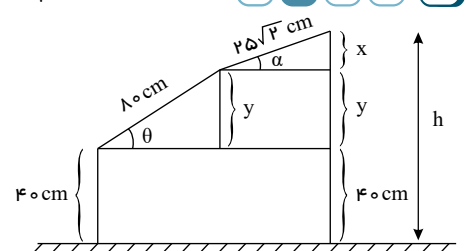
$$\Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \times \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3} + 60}{9 - 3} \Rightarrow x = \frac{60(\sqrt{3} + 1)}{6} = 10(\sqrt{3} + 1)$$



$$\sin \alpha = \frac{x}{25\sqrt{2}} \Rightarrow x = 25\sqrt{2} \sin \alpha, \sin \theta = \frac{y}{80} \Rightarrow y = 80 \sin \theta$$

$$h = 40 + x + y = 40 + 25\sqrt{2} \sin \alpha + 80 \sin \theta$$

با توجه به شکل زیر داریم:





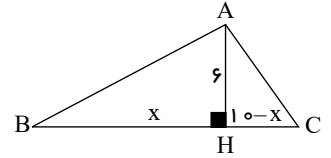
$$\Rightarrow h = 40 + 25\sqrt{2} \sin(-45^\circ) + 80 \sin(0) = 40 - 25\sqrt{2} \sin 45^\circ + 0$$

$$\Rightarrow h = 40 - 25\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 40 - 25 = 15$$

۵ اگر طول ضلع BH را برابر x در نظر بگیریم، طول ضلع CH برابر $(10 - x)$ خواهد شد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\begin{cases} \tan \hat{B} = \frac{6}{x} \\ \tan \hat{C} = \frac{6}{10-x} \end{cases} \rightarrow 3 \tan \hat{B} = 2 \tan \hat{C}$$

$$3\left(\frac{6}{x}\right) = 2\left(\frac{6}{10-x}\right) \rightarrow \frac{3}{x} = \frac{2}{10-x} \rightarrow 30 - 3x = 2x \rightarrow 5x = 30 \rightarrow x = 6$$



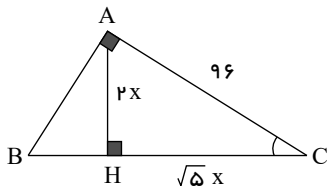
لذا مثلث AHB یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به طول ساق ۶ می باشد که اندازه ضلع AB (وتر) برابر $6\sqrt{2}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

$$1 + \cot^2 C = \frac{1}{\sin^2 C} \rightarrow 1 + \cot^2 C = \frac{169}{25} \rightarrow \cot^2 C = \frac{144}{25} \rightarrow \cot C = \frac{12}{5}$$

$$\frac{\Delta AHC}{\Delta AHC} : \cot C = \frac{CH}{AH} \rightarrow \frac{12}{5} = \frac{9}{AH} \rightarrow 12AH = 45 \rightarrow AH = 3.75$$

۷ چون $\cot C = \frac{CH}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ است می توان $CH = \sqrt{5}x$ و $AH = 2x$ را در نظر گرفت. ۱ ۲ ۳ ۴ ۷



$$\Delta AHC : (96)^2 = (2x)^2 + (\sqrt{5}x)^2 \rightarrow 96 \times 96 = 4x^2 + 5x^2 \rightarrow 96 \times 96 = 9x^2 \rightarrow x^2 = 32 \times 32 \rightarrow x = 32 \rightarrow AH = 2x = 64$$

۸ اگر θ بر حسب رادیان و r شعاع دایره و L اندازه ی کمان روبه رو به زاویه ی θ باشد داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow \theta = \frac{\frac{\pi}{2}}{5} = \frac{\pi}{10} \text{ رادیان}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\frac{\pi}{10}}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{1}{10} \rightarrow D = 18^\circ$$

۹ در ناحیه ی دوم دایره ی مثلثاتی مقادیر سینوس، مثبت و مقادیر کتانژانت منفی است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$\tan \alpha = \frac{AA'}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{0 < \alpha < 90^\circ} \alpha = 30^\circ$$

$$OB' = \cos \alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$\theta = \frac{l}{r} \rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{5}{r} \rightarrow r = \frac{30}{\pi}$$

$$\Rightarrow S = \pi r^2 = \pi \times \frac{900}{\pi^2} = \frac{900}{\pi}$$

۱۲ یک دور کامل در دایره، ۶۰ دقیقه است. بنابراین عقربه دقیقه شمار $\frac{2}{3}$ دایره را طی کرده است. دایره کامل 2π رادیان است. بنابراین داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$\text{زاویه دوران عقربه بر حسب رادیان} = \frac{2}{3} \times 2\pi = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\Rightarrow r = \frac{l(\text{طول کمان})}{\theta(\text{بر حسب رادیان})} = \frac{r(\text{شعاع دایره یا همان طول عقربه دقیقه شمار})}{\theta}$$

$$= \frac{60}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{45}{\pi} \text{ (سانتی متر)}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$\rightarrow \begin{cases} \text{ناحیه دوم} \quad 3 \approx 3 \times 57.3^\circ \approx 171.9^\circ \\ \text{ناحیه سوم} \quad 4.5 \approx 4.5 \times 57.3^\circ \approx 257.85^\circ \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$\theta = \frac{l}{r} \rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{18}{\pi}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$$\begin{cases} x - y = 18^\circ \\ x + y = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow 2x = 108^\circ \Rightarrow x = 54^\circ, y = 90^\circ - 54^\circ \Rightarrow y = 36^\circ$$

$$\frac{36}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{36\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$\widehat{AB} = r\alpha = r \times \frac{\pi}{6} = \frac{r\pi}{6}$$

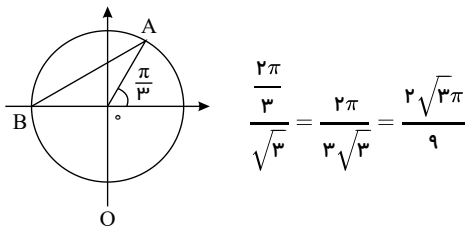
$$2r + \frac{r\pi}{6} = 12 + \pi \rightarrow r(2 + \frac{\pi}{6}) = 6(2 + \frac{\pi}{6}) \rightarrow r = 6$$

$$\rightarrow \widehat{AMB} = r \times (2\pi - \frac{\pi}{6}) = 6 \times \frac{11\pi}{6} \rightarrow \widehat{AMB} = 11\pi$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷ مختصات نقطه $A = (\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ است و $B(-1, 0)$ می شود. پس:

$$AB = \sqrt{(\frac{1}{2} - (-1))^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} - 0)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

طول کمان AB هم برابر زاویه $\widehat{AOB}$ است و $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ می شود. پس:

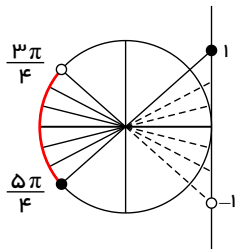


۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$\frac{3\pi}{8} < \alpha \leq \frac{5\pi}{8} \xrightarrow{\times 2} \frac{3\pi}{4} < 2\alpha \leq \frac{5\pi}{4} \xrightarrow{2\alpha=x} \frac{3\pi}{4} < x \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$-1 < \frac{-m+1}{2} \leq 1 \rightarrow -2 < -m+1 \leq 2 \rightarrow -3 < -m \leq 1 \rightarrow -1 \leq m < 3 \rightarrow m \in [-1, 3)$$

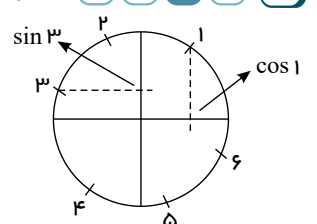
باتوجه به دایره مثلثاتی مشخص می شود که $-1 < \tan x \leq 1$ داریم:



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

ابتدا توجه کنید که $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ، $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ و زوایای داده شده در گزینه ها برحسب رادیان هستند.

$$1 \text{ rad} \approx 57^\circ \Rightarrow \begin{cases} 2 \text{ rad} \approx 114^\circ \\ 3 \text{ rad} \approx 171^\circ \\ 4 \text{ rad} \approx 228^\circ \end{cases}$$



گزینه ۱، نادرست است، زیرا: $\sin 4 < 0 < \cos(-1)$ گزینه ۲، نادرست است، زیرا: $\cos 2 < 0 < \sin 1$ گزینه ۴، نادرست است، زیرا: $\cos(-2) < 0 < \sin(-4)$

گزینه ۳، با توجه به دایره مثلثاتی (شکل بالا) درست است.

اول باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. **۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰**

از طرفی:

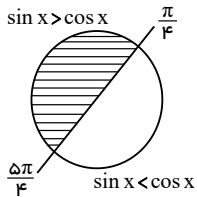
چون طرف چپ نامنفی است، پس باید طرف راست هم نامنفی باشد، در نتیجه:

با توجه به نکته‌ی مقابل و حالت (*) داریم:

(*) انتهای کمان x در ناحیه‌ی اول یا چهارم است. $\Rightarrow \cos x \geq 0$

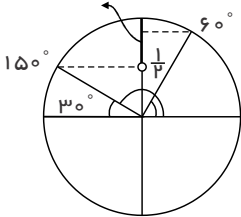
$$\cos x + \sqrt{\cos x} = \sin x \Rightarrow \sqrt{\cos x} = \sin x - \cos x$$

$$\sin x - \cos x \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq \cos x$$

 $\Rightarrow$ انتهای کمان x در ناحیه‌ی اول است.**۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱**مساحت و شعاع دایره (۲) را به ترتیب با S' و R' و مساحت و شعاع دایره (۱) را به ترتیب با S و R نمایش می‌دهیم، داریم:

$$\text{فرض سؤال: } \frac{S'}{S} = 3 \Rightarrow \frac{\pi R'^2}{\pi R^2} = 3 \Rightarrow \frac{R'}{R} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}} = \frac{R'(\frac{\pi}{6})}{R(\frac{\pi}{18})} = \frac{R'}{R} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$$

با توجه به دایره مثلثاتی داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲**محدوده $\sin 3\theta$ 

$$20^\circ < \theta < 50^\circ \Rightarrow 60^\circ < 3\theta < 150^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin 3\theta \leq 1$$

$$\frac{1}{2} < \frac{m-1}{2} \leq 1 \Rightarrow 1 < m-1 \leq 2 \Rightarrow 2 < m \leq 3 \Rightarrow m \in (2, 3]$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳

$$D = 900^\circ \Rightarrow \frac{900}{180} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \theta = 5\pi \Rightarrow \text{طول کمان طی شده } \ell = r \cdot \theta = 5\pi \times \frac{1}{\pi} = 5$$

چون هر یک ساعت ۲٫۵ متر می‌چرخد، پس در مدت ۲ ساعت ۵ متر می‌چرخد.

ابتدا باید ببینیم در یک دقیقه، کامیون چه مسافتی را طی می‌کند. **۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴**

$$60 \frac{km}{h} \times \frac{1h}{60 \min} \times \frac{1000 m}{1 km} = 1000 \frac{m}{\min}$$

کامیون در یک دقیقه، ۱۰۰۰ متر حرکت می‌کند، پس داریم:

$$2\pi r = 2 \times 3 \times 1 = 6 \Rightarrow 6n + \frac{2}{3} \times 6 = 1000 \Rightarrow 6n = 1000 - 4 = 996 \Rightarrow n = 166$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 600^\circ \\ \gamma &= -3\pi = -3 \times 180^\circ = -540^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \alpha = \beta - \gamma \rightarrow \alpha = 600^\circ - (-540^\circ) = 1140^\circ$$

$$\alpha = (3 \times 360^\circ) + 60^\circ = 60^\circ$$

بنابراین α در ربع اول قرار دارد.**۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶**

$$C \text{ طول کمان در دایره } \Rightarrow \ell = \ell' \Rightarrow r_C \cdot \alpha = r_{C'} \cdot \alpha'$$



$$\Rightarrow r_C \times \frac{\pi}{3} = r_{C'} \times \frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{1}{3}r_C = \frac{1}{12}r_{C'} \Rightarrow r_{C'} = 4r_C$$

$$\frac{S_C}{S_{C'}} = \frac{\pi r_C^2}{\pi r_{C'}^2} = \left(\frac{r_C}{r_{C'}}\right)^2 = \left(\frac{r_C}{4r_C}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

در هر ۶۰ دقیقه، عقربه ساعت‌شمار $\frac{\pi}{6}$ رادیان و عقربه دقیقه‌شمار 2π رادیان می‌چرخد، پس داریم: (۲۷) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\text{عقربه ساعت‌شمار} \Rightarrow \frac{60}{48} = \frac{\frac{\pi}{6}}{x} \Rightarrow x = \frac{48 \times \frac{\pi}{6}}{60} = \frac{8\pi}{60} = \frac{2\pi}{15}$$

$$\text{عقربه دقیقه‌شمار} \Rightarrow \frac{60}{48} = \frac{2\pi}{y} \Rightarrow y = \frac{48 \times 2\pi}{60} = \frac{8\pi}{5}$$

$$x + y = \frac{2\pi}{15} + \frac{8\pi}{5} = \frac{2\pi + 24\pi}{15} = \frac{26\pi}{15}$$

اگر اندازه زاویه برحسب رادیان را با R و برحسب درجه را با D نشان دهیم، داریم: (۲۸) ۱ ۲ ۳ ۴

$$R_r = 3R_1, \quad D_r = 60 + D_1, \quad \frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \Rightarrow D = \frac{180R}{\pi}$$

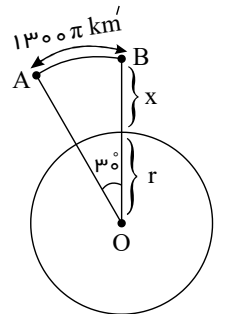
$$D_r = 60 + D_1 \Rightarrow \frac{180R_r}{\pi} = 60 + \frac{180R_1}{\pi} \Rightarrow 180R_r = 60\pi + 180R_1$$

$$3R_r = \pi + 3R_1 \Rightarrow 3 \times 3R_1 = \pi + 3R_1 \Rightarrow 6R_1 = \pi \Rightarrow R_1 = \frac{\pi}{6}$$

می‌دانیم 30° معادل $\frac{\pi}{6}$ رادیان است، پس داریم: (۲۹) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\widehat{AB} \text{ کمان } \ell = (x + r) \cdot \frac{\pi}{6} = 1300\pi \Rightarrow x + r = 6 \times 1300$$

$$\Rightarrow x + 6400 = 7800 \Rightarrow x = 1400 \text{ km}$$



(۳۰) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\text{رادیان} = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20} = \text{زاویه مرکزی بین دو کابین متوالی}$$

$$\frac{43\pi}{10} = \frac{86\pi}{20} = \frac{80\pi}{20} + \frac{6\pi}{20} = 4\pi + 6\left(\frac{\pi}{20}\right)$$

$$11 = 5 + 6 = \text{موقعیت جدید}$$

یعنی ۲ دور کامل حرکت کرده و سپس ۶ کابین جلو رفته است، پس:

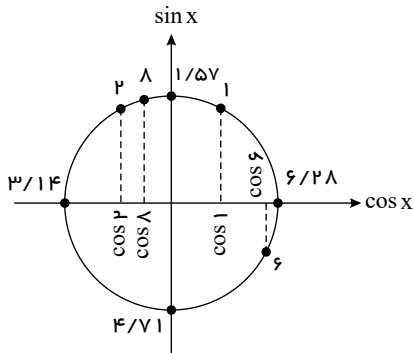
(۳۱) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\text{زاویه طی شده} \Rightarrow \frac{\ell_1}{r_1} = \frac{16\pi}{8} = 2\pi \Rightarrow r_1 = 8 \text{ cm}, \ell_1 = 16\pi$$

یعنی عقربه دقیقه‌شمار یک دور کامل را طی کرده است و از لحاظ زمانی یعنی یک ساعت گذشته است و می‌دانیم در یک ساعت، عقربه ساعت‌شمار $\frac{\pi}{6}$ رادیان را طی می‌کند، پس داریم:

$$\text{عقربه ساعت‌شمار} \Rightarrow \frac{\ell_2}{r_2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \ell_2 = r_2 \theta_2 = 6 \times \frac{\pi}{6} = \pi \text{ cm}$$

(۳۲) ۱ ۲ ۳ ۴ اول باید مکان زوایای موجود را روی دایره مثلثاتی تعیین کنیم، سپس کسینوس آن‌ها را بیابیم. توجه کنید که π را حدوداً 3.14 در نظر می‌گیریم.



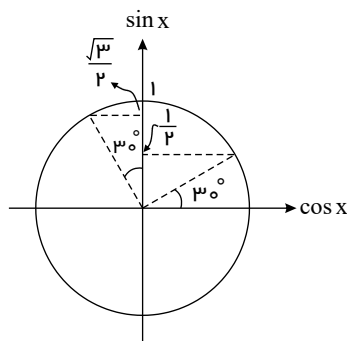
$$\cos 2 < \cos 8 < \cos 1 < \cos 6$$

طبق دایره مثلثاتی بالا داریم:

در نتیجه $\cos 2$ از همه آنها کوچکتر است.

کافی است زاویه‌ها را در دایره مثلثاتی نشان دهیم می‌توانیم ببینیم وقتی $\alpha = 30^\circ$ است، $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ و وقتی α به 90° می‌رسد، $\sin \alpha$ هم به ماکسیمم مقدار $\frac{1}{2}$ می‌رسد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۳)

خود یعنی عدد ۱ رسیده است چون مقدار $\sin \alpha$ از 90° تا 120° کاهش می‌یابد.



$$[a, b] = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow \max(b - a) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

بنابراین داریم:

می‌دانیم که وقتی عقربه دقیقه‌شمار یک دور کامل می‌چرخد، عقربه ساعت‌شمار ۱ ساعت، یعنی $\frac{1}{12}$ دور کامل می‌چرخد. پس می‌توان گفت عقربه دقیقه‌شمار (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۴)

همیشه ۱۲ برابر عقربه ساعت‌شمار می‌چرخد.

حال که دقیقه‌شمار $\frac{3\pi}{11}$ رادیان طی کرده، ساعت‌شمار $\frac{1}{12} \times \frac{3\pi}{11}$ رادیان طی خواهد کرد، یعنی $\frac{\pi}{44}$ رادیان.

طول ضلع AB برابر $\tan \alpha$ می‌باشد، پس مساحت مثلث AOB برابر است با: (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۵)

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times OA \xrightarrow{OA=1} S = \frac{1}{2} \times \tan \alpha$$

مختصات نقطه P روی دایره مثلثاتی به صورت $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ می‌باشد.

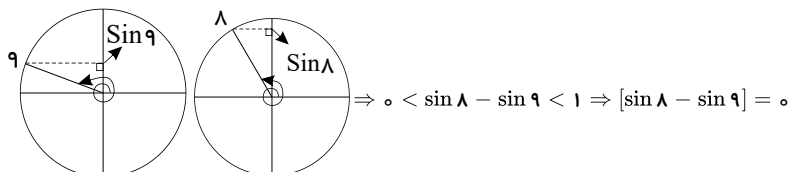
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow (2a - 1)^2 + a^2 = 1 \Rightarrow 5a^2 - 4a + 1 = 1 \Rightarrow a(5a - 4) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{ق ق} \\ a = \frac{4}{5} & \text{ق ق} \end{cases}$$

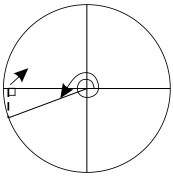
پس $\cos \alpha$ برابر $\frac{4}{5}$ می‌باشد و $\sin \alpha$ برابر $\frac{3}{5}$ است.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \rightarrow S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

زاویه‌های داده‌شده برحسب رادیان هستند و هر رادیان تقریباً برابر با 57° درجه است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۶)



$$\Rightarrow 0 < \sin 8 - \sin 9 < 1 \Rightarrow [\sin 8 - \sin 9] = 0$$



$$\Rightarrow -1 < \cos 1^\circ < 0 \Rightarrow [\cos 1^\circ] = -1 \Rightarrow A = 2(0) + (-1) = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۷

$$\begin{cases} L_1 = R\beta \\ L_r = R\alpha \\ \alpha = 4\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_1 = R\beta \\ L_r = 4R\beta \end{cases}$$

$$L_1 \times L_r = \frac{\pi}{9} \times \pi R^2 \rightarrow R\beta \times 4R\beta = \frac{\pi^2 R^2}{9} \rightarrow 4\beta^2 = \frac{\pi^2}{9}$$

$$\rightarrow 2\beta = \frac{\pi}{3} \rightarrow \beta = \frac{\pi}{6} \rightarrow \beta = 30^\circ \text{ و } \alpha = 4\beta \xrightarrow{\beta=30^\circ} \alpha = 120^\circ$$

مثلث متساوی الساقین $\alpha \rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \rightarrow \gamma = 30^\circ \rightarrow \gamma = \beta$ مثلث متساوی الساقین

پس مثلث متساوی الساقین است و زاویه قائمه ندارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۸ می‌دانیم که $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ است و چون $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ است انتهای کمان در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است.

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \right) = \frac{\tan x}{\frac{1}{|\cos x|}} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = - \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) (\cos x) \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = -\cos^2 x$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۹ می‌دانیم که $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ است و چون $\frac{3\pi}{2} < x < \pi$ است انتهای کمان در ناحیه سوم دایره مثلثاتی است.

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x \right) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \left(2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \sin^2 x \right) = \frac{1}{|\cos x|} (1 - \sin^2 x) = \frac{-1}{\cos x} (\cos^2 x) = -\cos x$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰ اگر دو زاویه α و β متمم باشند، داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta, \cos \alpha = \sin \beta \\ \tan \alpha = \cot \beta, \cot \alpha = \tan \beta \end{cases}$$

چون $7x = \frac{\pi}{2}$ داریم:

$$x + 6x = 7x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x = \sin 6x$$

$$2x + 5x = 7x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 2x = \cos 5x$$

$$3x + 4x = 7x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan 3x = \cot 4x$$

$$\frac{\cos x \sin 2x \tan 3x}{\cot 4x \cos 5x \sin 6x} = \frac{\sin 6x \cos 5x \cot 4x}{\cot 4x \cos 5x \sin 6x} = 1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱ می‌دانیم که $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ است.

ابتدا طرفین تساوی را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\div \cos^2 x}{\cos^2 x} \rightarrow 2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 \frac{\sin x}{\cos x} + 4 = \frac{3}{\cos^2 x} \Rightarrow 2 \tan^2 x - 3 \tan x + 4 = 3(1 + \tan^2 x)$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + 3 \tan x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{c}{a} = -4 \end{cases}$$

مجموع مقادیر ممکن برای $\tan x$: $1 + (-4) = -3$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۲

$$\tan x + \cot x = \frac{5}{2} \rightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{5}{2} \xrightarrow{\times 2 \tan x} 2 \tan^2 x + 2 = 5 \tan x \rightarrow 2 \tan^2 x - 5 \tan x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9 \rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{5+3}{4} = 2 \text{ غ ق ۲} \\ \tan x = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \cot x = 2 \end{cases}$$



$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{5} \rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳

می‌دانیم:

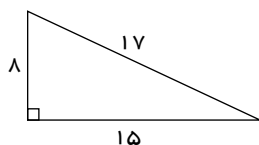
$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

از طرفی:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

* البته با داشتن اعداد فیثاغورثی ۸ و ۱۵ و ۱۷ ساده‌تر توانستیم $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ را محاسبه کنیم.



$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{1}{10} - \frac{1}{17}}{\frac{1}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{\frac{17-10}{170}}{\frac{1-15}{17}} = \frac{\frac{7}{170}}{\frac{-14}{17}} = -\frac{1}{20}$$

دقت کنید اگر $\frac{\alpha}{2}$ در ربع اول باشد با توجه به مقدار $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$ نیز ربع اول خواهد بود و اگر $\frac{\alpha}{2}$ در ربع سوم باشد باز هم α در ربع اول خواهد بود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۴

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\sin \beta} = \frac{-\sin \alpha}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵

$$\tan(\frac{11\pi}{4}) = \tan(3\pi - \frac{\pi}{4}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin(\frac{15\pi}{4}) = \sin(4\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\frac{13\pi}{4}) = \cos(3\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{پس: } A = (-1) + (-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۶

$$\tan \frac{17\pi}{6} = \tan(3\pi - \frac{\pi}{6}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin \frac{11\pi}{3} = \sin(4\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{10\pi}{3} = \cos(3\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{پس: } \tan \frac{17\pi}{6} \cdot \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3} = (-\frac{\sqrt{3}}{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$



$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha, \sin(3\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha, \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 5$$

تک تک جملات را بر $\cos \alpha$ تقسیم می‌کنیم

$$\cos(3x + \frac{\pi}{12}) + \cos(\frac{\pi}{6} - x) = 0$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 0 \rightarrow \alpha + \beta = \pi$$

$$\Rightarrow 3x + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} - x = \pi \rightarrow 2x = \pi - \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} \rightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = \frac{3\pi}{8}$$

$$\sin 75^\circ = \sin(2 \times 36^\circ + 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos(-42^\circ) = \cos 42^\circ = \cos(36^\circ + 6^\circ) = \cos 6^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan(-315^\circ) = -\tan(315^\circ) = -\tan(36^\circ - 45^\circ) = -(-\tan 45^\circ) = 1$$

$$\frac{\sin 75^\circ + \cos(-42^\circ)}{2 \tan(-315^\circ)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2(1)} = \frac{1}{2}$$

پس:

$$\text{گزینه ۴: } \sin 15^\circ = \sin(18^\circ - 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2} \checkmark$$

$$\sin(\theta - \frac{5\pi}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow -\sin(\frac{5\pi}{2} - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin(2\pi + \frac{\pi}{2} - \theta) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A = (\sin^r \theta - \cos^r \theta) \underbrace{(\sin^r \theta + \cos^r \theta)}_1 + \frac{1}{\frac{1}{\cos^r \theta}} = \sin^r \theta - \cos^r \theta + \cos^r \theta = \sin^r \theta$$

$$A = 1 - \cos^r \theta = 1 - (-\frac{\sqrt{3}}{3})^r = 1 - \frac{3}{9} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \cos \alpha = -\frac{3}{5} \\ \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \sin \alpha = -\frac{4}{5} \\ \cot \alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cot \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\text{پس : } \sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4} = -\frac{12}{25} + \frac{3}{4} = \frac{-48 + 75}{100} = \frac{27}{100} = 0,27$$

$$\begin{aligned} \frac{A \sin 108^\circ + \cos 72^\circ}{A \sin 918^\circ} &= \frac{A \sin(90^\circ + 18^\circ) + \cos(90^\circ - 18^\circ)}{A \sin(720^\circ + 198^\circ)} \\ &= \frac{A \cos 18^\circ + \sin 18^\circ}{A \sin(180^\circ + 18^\circ)} = \frac{A \cos 18^\circ + \sin 18^\circ}{-A \sin 18^\circ} \\ &= \frac{A \cos 18^\circ}{-A \sin 18^\circ} + \frac{\sin 18^\circ}{-A \sin 18^\circ} = -\cot 18^\circ - \frac{1}{A} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{A} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{A} = -\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{A} = \frac{-3 - 2\alpha}{3\alpha}$$

$$\rightarrow A = \frac{3\alpha}{-3 - 2\alpha} = \frac{-3\alpha}{3 + 2\alpha}$$

۵۳ اگر $\alpha + \beta = \pi$ باشد آن گاه $\cos \alpha + \cos \beta = 0$ است پس:

$$(x + 30^\circ) + (2x + 60^\circ) = 180^\circ \Rightarrow 3x = 90^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$$

آن گاه:

$$\frac{1 + \tan 30^\circ}{1 + \cot 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{3(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۵۴ هر کدام از نسبت های مثلثاتی داده شده را حساب می کنیم.

$$\sin \frac{17\pi}{3} = \sin\left(5\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) = \cos \frac{17\pi}{6} = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{19\pi}{4} = \tan\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right) = -\sin \frac{11\pi}{6} = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{پس : } \sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۵۵

$$\frac{2 \sin 20^\circ + \cos 29^\circ}{\sin 16^\circ + 2 \cos 7^\circ} = \frac{2 \sin(18^\circ + 2^\circ) + \cos(27^\circ + 2^\circ)}{\sin(18^\circ - 2^\circ) + 2 \cos(9^\circ - 2^\circ)}$$

$$= \frac{-2 \sin 2^\circ + \sin 2^\circ}{\sin 2^\circ + 2 \sin 2^\circ} = \frac{-\sin 2^\circ}{3 \sin 2^\circ} = -\frac{1}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۶

می‌دانیم که $\tan(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$ است.

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{10}{100} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin \theta = \pm \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

ناحیه سوم $\rightarrow \sin \theta = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{10}}{10}}{-\frac{3\sqrt{10}}{10}} = \frac{1}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۷

$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow (-\frac{1}{3})^2 + y^2 = 1^2 \rightarrow y^2 = \frac{8}{9} \rightarrow y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} \rightarrow \tan \alpha = -2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow A = 3 \sin(\pi + \alpha) + 2 \tan^2 \alpha = 3(-\sin \alpha) + 2 \tan^2 \alpha = 3(-\frac{2\sqrt{2}}{3}) + 2(-2\sqrt{2})^2$$

$$\rightarrow A = -2\sqrt{2} + 2(8) \rightarrow A = 16 - 2\sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۸ اگر نقطه $P(x, y)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم نقطه $P'(-x, -y)$ به دست می‌آید که در دایرهٔ مثلثاتی نقطه P' نسبت به نقطه P به اندازهٔ π رادیان اختلاف دارد و داریم:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۹

$$\sin(\pi + x) = \frac{1}{2} + \sin(\pi - x) \rightarrow -\sin x = \frac{1}{2} + \sin x \rightarrow -\frac{1}{2} = 2 \sin x$$

$$\rightarrow \sin x = -\frac{1}{4}, \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cot(\frac{\pi}{2} + x) = -\tan x = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۰ می‌دانیم که $\tan 18^\circ = 0$ است.

$$A = \tan 2^\circ + \tan 4^\circ + \tan 6^\circ + \tan 8^\circ + \tan 10^\circ + \tan 12^\circ + \tan 14^\circ + \tan 16^\circ + \tan 18^\circ$$

$$\rightarrow A = \tan 2^\circ + \tan 4^\circ + \tan 6^\circ + \tan 8^\circ + \tan(18^\circ - 8^\circ) + \tan(18^\circ - 6^\circ)$$

$$+ \tan(18^\circ - 4^\circ) + \tan(18^\circ - 2^\circ)$$

$$\rightarrow A = \tan 2^\circ + \tan 4^\circ + \tan 6^\circ + \tan 8^\circ - \tan 8^\circ - \tan 6^\circ - \tan 4^\circ - \tan 2^\circ = 0$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۶۱

$$\sin ۴۵۱^\circ = \sin(۳۶۰^\circ + ۹۱^\circ) = \sin ۹۱^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۱^\circ) = \cos 1^\circ$$

حال گزینه ۲، ۳ و ۴ را بررسی می‌کنیم:

$$۲ \text{ گزینه } -\sin ۲۶۹^\circ = -\sin(۲۷۰^\circ - 1^\circ) = \cos 1^\circ$$

$$۳ \text{ گزینه } \sin ۶۳۱^\circ = \sin(۳۶۰^\circ + ۱۸۰^\circ + ۹۰^\circ + 1^\circ) = \sin(۱۸۰^\circ + ۹۰^\circ + 1^\circ) = -\sin(۹۰^\circ + 1^\circ) = -\cos 1^\circ$$

$$۴ \text{ گزینه } \cos(-\frac{\pi}{180}) = \cos(-1^\circ) = \cos 1^\circ$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۲

$$\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(\alpha - 3\pi) = -\sin(3\pi + \pi - \alpha) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = -\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\frac{\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) - 2\sin(\alpha - 3\pi)}{3\sin(\alpha - \frac{3\pi}{2})} = 2 \Rightarrow \frac{\sin \alpha - 2(-\sin \alpha)}{3\cos \alpha} = 2 \Rightarrow \frac{3\sin \alpha}{3\cos \alpha} = 2$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = 2 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۳

$$\cos ۲۶۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ + ۸۰^\circ) = -\cos ۸۰^\circ$$

$$\cos ۵۵۰^\circ = \cos(۳۶۰^\circ + ۱۹۰^\circ) = \cos ۱۹۰^\circ = \cos(۲۷۰^\circ - ۸۰^\circ) = -\sin ۸۰^\circ$$

$$\sin ۷۳۰^\circ = \sin(۲ \times ۳۶۰^\circ + ۱۰^\circ) = \sin ۱۰^\circ = \sin(۹۰^\circ - ۸۰^\circ) = \cos ۸۰^\circ$$

$$\text{پس: } A = \frac{-\cos ۸۰^\circ - (-\sin ۸۰^\circ)}{\sin ۸۰^\circ + \cos ۸۰^\circ} = \frac{-\frac{\cos ۸۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ} + \frac{\sin ۸۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ}}{\frac{\sin ۸۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ} + \frac{\cos ۸۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ}} = \frac{-\cot ۸۰^\circ + 1}{1 + \cot ۸۰^\circ} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۴

$$\begin{cases} 2\cos(\pi - x) + \sin(\frac{\pi}{2} + x) < 0 \Rightarrow -2\cos x + \cos x < 0 \Rightarrow -\cos x < 0 \Rightarrow \cos x > 0 \\ \tan(\frac{\pi}{2} - x) - \tan(\frac{\pi}{2} + x) > 0 \Rightarrow \cot x + \cot x > 0 \Rightarrow 2\cot x > 0 \Rightarrow \cot x > 0 \end{cases}$$

فقط در ناحیه اول است که هم کسینوس و هم کتانژانت مثبت هستند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۵

$$\sin(-\frac{7\pi}{6}) + 2\tan(\frac{25\pi}{4}) - 3\cos(\frac{124\pi}{3}) = -\sin(\frac{7\pi}{6}) + 2\tan(\frac{25\pi}{4}) - 3\cos(\frac{124\pi}{3}) = -\sin(\pi + \frac{\pi}{6}) + 2\tan(6\pi + \frac{\pi}{4}) - 3\cos(41\pi + \frac{\pi}{3})$$

$$= \sin \frac{\pi}{6} + 2\tan \frac{\pi}{4} - 3\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 2 \times 1 + 3\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2 + 3 \times \frac{1}{2} = 4$$

زاوایای داده شده را باید با کمک ۳۵° بازنویسی کنیم، لذا داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۶

$$\frac{\sin(۱۸۰^\circ + ۳۵^\circ) + \cos(۹۰^\circ + ۳۵^\circ)}{\tan(۳۶۰^\circ - ۳۵^\circ) - \cot(۲۷۰^\circ - ۳۵^\circ)} = \frac{-\sin ۳۵^\circ - \sin ۳۵^\circ}{-\tan ۳۵^\circ - \tan ۳۵^\circ} = \frac{-2\sin ۳۵^\circ}{-2\tan ۳۵^\circ} = \frac{\sin ۳۵^\circ}{\frac{\sin ۳۵^\circ}{\cos ۳۵^\circ}} = \cos ۳۵^\circ$$

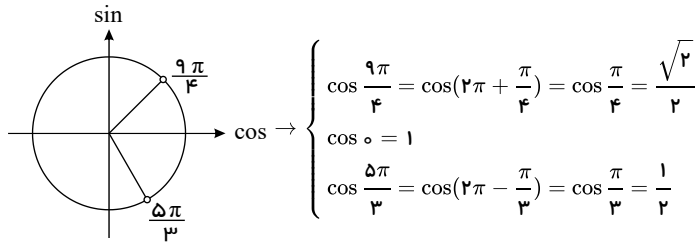
با توجه به این که $x = \sin ۳۵^\circ$ و این زاویه در ناحیه اول می باشد، داریم:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \rightarrow \cos^2 ۳۵^\circ = 1 - \sin^2 ۳۵^\circ \rightarrow \cos ۳۵^\circ = \sqrt{1 - x^2}$$

با به دست آوردن محدوده $2x$ داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۷

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{18} < \frac{x - \pi}{3} < \frac{\pi}{24} \times 2 \rightarrow -\frac{\pi}{6} < x - \pi < \frac{\pi}{12} \\ \rightarrow -\frac{\pi}{6} + \pi < x < \frac{\pi}{12} + \pi \rightarrow \frac{5\pi}{6} < x < \frac{13\pi}{12} \end{aligned}$$



در این بازه، $\cos 2x$ هریک از مقادیر بازه $[\frac{1}{2}, 1]$ را می‌تواند اختیار کند.

یعنی: $\frac{1}{2} < \cos 2x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < 2m - 1 \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{4} < m \leq 1$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۸

$$\cos(\frac{7\pi}{2} - x) + \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \cos(2\pi + \frac{3\pi}{2} - x) + \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow -\sin x - \cos x = \frac{2}{3} \rightarrow \sin x + \cos x = -\frac{2}{3}$$

می‌دانیم که $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ است بنابراین نیاز به پیدا کردن $\sin x \cdot \cos x$ داریم. برای این کار عبارت آخر به دست آمده را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(\sin x + \cos x)^2 = (-\frac{2}{3})^2 \rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2 \sin x \cos x = \frac{4}{9}$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos x = -\frac{5}{9} \rightarrow \sin x \cos x = -\frac{5}{18}$$

پس: $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x)$

$$= (-\frac{2}{3})^3 - 3(-\frac{5}{18})(-\frac{2}{3}) = -\frac{8}{27} - \frac{15}{27} = -\frac{23}{27}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۹

$$\sin \frac{4\pi}{5} = \sin(\pi - \frac{\pi}{5}) = \sin \frac{\pi}{5} = \sin 36^\circ$$

$$\cos 324^\circ = \cos(360^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ$$

$$\rightarrow \log(\sin 36^\circ) - \log(\cos 36^\circ) + \log A = 0 \rightarrow \log\left(\frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ}\right) + \log A = 0$$

$$\rightarrow \log A = -\log(\tan 36^\circ) \rightarrow \log A = \log(\tan 36^\circ)^{-1}$$

$$\rightarrow \log A = \log(\cot 36^\circ) \rightarrow \log A = \log(\tan(90^\circ - 36^\circ)) \rightarrow \log A = \log(\tan 54^\circ) \rightarrow A = \tan 54^\circ$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۰

$$\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + 2 \sin(\pi - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 3 \cos(2\pi + \alpha)} = \frac{-\cos \alpha + 2 \sin \alpha}{-\sin \alpha + 3 \cos \alpha} = 2$$

$$\rightarrow -2 \sin \alpha + 6 \cos \alpha = -\cos \alpha + 2 \sin \alpha \rightarrow -4 \sin \alpha = -7 \cos \alpha \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{7}{4} \rightarrow \tan \alpha = \frac{7}{4}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + (\frac{7}{4})^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{49}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\rightarrow \frac{65}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{65} \xrightarrow{\text{ربع اول}} \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$$



$$\pi \leq x \leq 2\pi \rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{b>0} -b \leq b \cos x \leq b$$

$$\rightarrow a - b \leq a + b \cos x \leq a + b \rightarrow \begin{cases} a - b = \frac{1}{2} \\ a + b = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow a = 1, b = \frac{1}{2}$$

$$\text{پس: } f(x) = 1 + \frac{1}{2} \cos x \rightarrow f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} \cos \frac{5\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{-\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{2} \rightarrow \cot \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin(\pi - \theta) + 2 \cos(\pi + \theta)}{2 \sin(2\pi - \theta) + \cos(2\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta - 2 \cos \theta}{-2 \sin \theta + \cos \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\sin \theta} - \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta}}{\frac{-2 \sin \theta}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{1 - 2 \cot \theta}{-2 + \cot \theta}$$

$$= \frac{1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)}{-2 + \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{-\frac{5}{2}} = -\frac{4}{5}$$

ابتدا تمام زوایا را بر حسب 15° می‌نویسیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۳

$$\begin{aligned} \cos 285^\circ &= \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ \\ \sin 525^\circ &= \sin(540^\circ - 15^\circ) = \sin(180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ \end{aligned}$$

$$\text{بنابراین داریم: } \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

تمام جملات را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0.28 + 1}{0.28 - 1} = \frac{1.28}{-0.72} = \frac{-128}{72} = -\frac{16}{9}$$

ابتدا تمام زوایا را بر حسب 20° می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \sin 25^\circ &= \sin(27^\circ - 2^\circ) = -\cos 2^\circ, \quad \sin 70^\circ = \sin(72^\circ - 2^\circ) = \sin(-2^\circ) = -\sin 2^\circ \\ \cos 56^\circ &= \cos(54^\circ + 2^\circ) = \cos(18^\circ + 2^\circ) = -\cos 2^\circ, \quad \cos 11^\circ = \cos(9^\circ + 2^\circ) = -\sin 2^\circ \end{aligned}$$

$$\text{بنابراین داریم: } \frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ} = \frac{-\cos 2^\circ - \sin 2^\circ}{-\cos 2^\circ + \sin 2^\circ}$$

تمام جملات را بر $\cos 2^\circ$ تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{-1 - \tan 2^\circ}{-1 + \tan 2^\circ} = \frac{-1 - 0.04}{-1 + 0.04} = \frac{-1.04}{-0.96} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

$$\tan 300^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ) = \tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cos 210^\circ = \cos(270^\circ - 60^\circ) = -\sin(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 48^\circ = \tan(36^\circ + 12^\circ) = \tan(12^\circ) = \tan(18^\circ - 6^\circ) = -\tan(6^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 84^\circ = \sin(4 \times 36^\circ + 12^\circ) = \sin(12^\circ) = \sin(18^\circ - 6^\circ) = \sin(6^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{پس: } \tan(300^\circ) \cos(210^\circ) + \tan(48^\circ) \sin(84^\circ) = (-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\tan 285^\circ = \tan(270^\circ + 15^\circ) = -\cot 15^\circ$$

$$\tan(-165^\circ) = -\tan 165^\circ = -\tan(180^\circ - 15^\circ) = \tan 15^\circ$$

$$\sin(1095^\circ) = \sin(6 \times 180^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$



$$\cos(255^\circ) = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{پس: } \tan(285^\circ) \cdot \tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ) \cos(255^\circ) &= (-\cot 15^\circ)(\tan 15^\circ) - (\sin 15^\circ)(-\sin 15^\circ) = -1 + \sin^2 15^\circ \\ &= -(1 - \sin^2 15^\circ) = -\cos^2 15^\circ \end{aligned}$$

۷۷ می‌دانیم $\cot a - \tan a = 2 \cot 2a$ است. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{\tan x - \cot x}{\cos 2x} = 5 \rightarrow \frac{-2 \cot 2x}{\cos 2x} = 5 \rightarrow \frac{-2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x}}{\cos 2x} = 5 \rightarrow \frac{-2}{\sin 2x} = 5 \rightarrow \sin 2x = -\frac{2}{5}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = -\sin 2x = -\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

۷۸ می‌دانیم که $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ است. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{3}{2} \rightarrow 3 \tan \alpha - 3 = 2 \tan \alpha + 2 \rightarrow \tan \alpha = 5$$

$$\text{پس: } \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{10}{1 + 25} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

۷۹ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$\frac{\sin 2^\circ \sin 5^\circ \sin 7^\circ}{\sin 8^\circ} = \frac{\sin 2^\circ \sin(9^\circ - 4^\circ) \sin(9^\circ - 2^\circ)}{\sin 8^\circ} = \frac{\sin 2^\circ \cos 4^\circ \cos 2^\circ}{\sin 8^\circ}$$

$$= \frac{\sin 2^\circ \cos 2^\circ \cos 4^\circ}{\sin 8^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \sin(2 \times 2^\circ) \cos 4^\circ}{\sin 8^\circ} = \frac{\sin 4^\circ \cos 4^\circ}{2 \sin 8^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \sin(2 \times 4^\circ)}{2 \sin 8^\circ}$$

$$= \frac{\sin 8^\circ}{2 \sin 8^\circ} = \frac{1}{2}$$

۸۰ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 - 2 \sin^2 a \cos^2 a$ است.

$$\tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha = \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}{\sin^3 \alpha \cos^3 \alpha} = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha \cos \alpha)^3}$$

$$= \frac{1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{1 - \frac{2}{9}}{\frac{1}{27}} = 27\left(1 - \frac{2}{9}\right) = 27 - 6 = 21$$

۸۱ می‌دانیم: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\cos^2 x = 1 + \sin^2 x \rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 1 \rightarrow \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_1 (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \rightarrow \cos 2x = 1$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \rightarrow 1 = 2 \cos^2 x - 1 \rightarrow 2 \cos^2 x = 2 \rightarrow \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x = \pm 1$$

۸۲ می‌دانیم: $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{3 \sin x - 4 \cos x}{\sin x + 6 \cos x} = 1 \xrightarrow{\div \cos x} \frac{3 \tan x - 4}{\tan x + 6} = 1 \rightarrow 3 \tan x - 4 = \tan x + 6$$

$$\rightarrow 2 \tan x = 10 \rightarrow \tan x = 5$$

$$\text{پس: } \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{10}{1 - 25} = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12} \rightarrow \cot 2x = -\frac{12}{5}$$

۸۳ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$ است.

$$\sin x = \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2 \times \frac{6}{16} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$



$$\cos 4x = \cos 2(2x) = 2 \cos^2 2x - 1 = 2 \times \frac{1}{16} - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۴

می‌دانیم $1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$ است.

$$1 + \sin 22^\circ = m \Rightarrow 1 + \sin(18^\circ + 4^\circ) = m \Rightarrow 1 - \sin 4^\circ = m \Rightarrow 1 - \sin(9^\circ - 5^\circ) = m$$

$$\Rightarrow 1 - \cos 5^\circ = m \Rightarrow 2 \sin^2 \left(\frac{5^\circ}{2}\right) = m \Rightarrow \sin^2 25^\circ = \frac{m}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۵

می‌دانیم $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ است.

$$\sin 15^\circ \times \cos 75^\circ - \frac{1}{2} = \sin 15^\circ \times \cos(90^\circ - 15^\circ) - \frac{1}{2} = \sin 15^\circ \sin 15^\circ - \frac{1}{2}$$

$$= \sin^2 15^\circ - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1 - 2 \sin^2 15^\circ) = -\frac{1}{2} \cos(2 \times 15^\circ) = -\frac{1}{2} \cos 30^\circ = -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۶ می‌دانیم: $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a, \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$

$$\sin(\pi + x) - \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow -\sin x - \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -2 \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{4}$$

از طرفی $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \cos 2x$ و با کمک فرمول $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ حاصل عبارت خواسته شده را می‌یابیم:

$$\cos 2x = 1 - 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۷ می‌دانیم: $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a, \sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 3 \Rightarrow \sin \theta + \cos \theta = 3 \sin \theta - 3 \cos \theta \Rightarrow 4 \cos \theta = 2 \sin \theta \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2$$

$$\Rightarrow \tan \theta = 2$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \times \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1 + 4} = \frac{2}{5} = 0,4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۸

می‌دانیم $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$ و $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$\cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2(2\alpha) = \frac{1}{4} \sin 4\alpha = \frac{1}{4} \sin(4 \times 75^\circ) = \frac{1}{4} \sin(300^\circ) = \frac{1}{4} \sin(360^\circ - 60^\circ)$$

$$= \frac{1}{4} \sin(-60^\circ) = -\frac{1}{4} \sin 60^\circ = -\frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{8}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۹ می‌دانیم که $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$ است.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha$$

برای محاسبه $-\sin 2\alpha$ کافی است طرفین تساوی $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ را به توان ۲ برسانیم.

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۰

می‌دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$1 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \cos^2 \theta - \cos^2 \theta = \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) = \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$



$$= (\sin \theta \cos \theta)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta = \frac{1}{4} \times a^2 = \frac{a^2}{4}$$

می‌دانیم $(\sin a + \cos a)^2 = 1 + \sin 2a$ و $\tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a}$ است. (۹۱) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin x + \cos x = \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{توان}} 1 + \sin 2x = \frac{25}{16} \rightarrow \sin 2x = \frac{9}{16}$$

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} \rightarrow \tan x + \cot x = \frac{2}{\frac{9}{16}} = \frac{32}{9}$$

$$\rightarrow \sqrt{\tan x + \cot x} = \frac{\sqrt{32}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

می‌دانیم: (۹۲) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a, \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\cos x - \sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2 \sin x} \rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x - \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \times 2 \rightarrow \sin 2x - 1 + \cos 2x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \sin 2x + \cos 2x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{توان}} \underbrace{\sin^2 2x + \cos^2 2x}_{1} + \underbrace{2 \sin 2x \cos 2x}_{\frac{1}{2} \sin 4x} = 1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2}$$

$$\rightarrow 1 + \sin 4x = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2} - \sqrt{2}$$

می‌دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است. (۹۳) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14} = \sin \frac{\pi}{14} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14}\right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{14}\right) = \sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{4\pi}{14} \cos \frac{2\pi}{14}$$

عبارت را در $\cos \frac{\pi}{14}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14} \cos \frac{2\pi}{14} \cos \frac{4\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{14} \cos \frac{2\pi}{14} \cos \frac{4\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{14} \cos \frac{4\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \sin \frac{8\pi}{14}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14}\right)} = \frac{\frac{1}{8} \sin \left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right)}{\sin \left(\frac{6\pi}{7}\right)} = \frac{\frac{1}{8} \sin \frac{6\pi}{7}}{\sin \frac{6\pi}{7}} = \frac{1}{8}$$

می‌دانیم: (۹۴) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\cot a + \tan a = \frac{2}{\sin 2a}, \cot a - \tan a = 2 \cot 2a, a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$\tan^2 \frac{\pi}{8} - \cot^2 \frac{\pi}{8} = \left(\tan^2 \frac{\pi}{8} + \cot^2 \frac{\pi}{8}\right) \left(\tan^2 \frac{\pi}{8} - \cot^2 \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \left(\left(\tan \frac{\pi}{8} + \cot \frac{\pi}{8}\right)^2 - 2 \tan \frac{\pi}{8} \cot \frac{\pi}{8}\right) \left(\tan \frac{\pi}{8} + \cot \frac{\pi}{8}\right) \left(\tan \frac{\pi}{8} - \cot \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \left(\left(\frac{2}{\sin \frac{\pi}{4}}\right)^2 - 2\right) \left(\frac{2}{\sin \frac{\pi}{4}}\right) (-2 \cot \frac{\pi}{4})$$

$$= \left(\left(\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2 - 2\right) \left(\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) (-2(1)) = (6) \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right) (-2) = \frac{-48}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -24\sqrt{2}$$

که جواب حاصل ۲۴- برابر $\sqrt{2}$ است.



۹۵ می‌دانیم $a^r + b^r = (a+b)^r - r a b (a+b)$ و $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$\sin^r \frac{\pi}{12} + \cos^r \frac{\pi}{12} = (\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12})^r - \underbrace{r \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}}_{\frac{1}{2} \sin \frac{r\pi}{12}} (\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}) = (\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12})^r - \frac{r}{2} \sin \frac{\pi}{12} (\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12})$$

$$= (\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12})^r - \frac{r}{2} (\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}) \quad *$$

اکنون باید $\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$ را حساب کنیم.

$$\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} = A \xrightarrow[\text{توان ۲}]{(\sin a + \cos a)^2 = 1 + \sin 2a} 1 + \sin \frac{\pi}{6} = A^2$$

$$\rightarrow A^2 = \frac{3}{2} \rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow (\frac{\sqrt{6}}{2})^r - \frac{r}{2} (\frac{\sqrt{6}}{2}) = \frac{6\sqrt{6}}{8} - \frac{3\sqrt{6}}{4} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

۹۶ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$A = \left(1 + \cos \frac{\pi}{\lambda}\right) \left(1 + \cos(\pi - \frac{\pi}{\lambda})\right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{\lambda}\right) \left(1 + \cos(\pi - \frac{3\pi}{\lambda})\right)$$

$$A = \left(1 + \cos \frac{\pi}{\lambda}\right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{\lambda}\right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{\lambda}\right) \left(1 - \cos \frac{3\pi}{\lambda}\right) = \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}\right) \left(1 - \cos^2 \frac{3\pi}{\lambda}\right)$$

$$A = \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \sin^2 \frac{3\pi}{\lambda} = \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \sin^2 \left(\frac{3\pi - \pi}{\lambda}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\lambda}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}$$

$$A = \left(\sin \frac{\pi}{\lambda} \cos \frac{\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin 2\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)\right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

۹۷ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم $\tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a}$ و $(\sin a - \cos a)^2 = 1 - \sin 2a$ است.

$$\sin 2x - \cos 2x = \frac{2}{3} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{(\sin 2x - \cos 2x)^2} \frac{4}{9} \rightarrow 1 - \sin 4x = \frac{4}{9} \rightarrow \sin 4x = \frac{5}{9}$$

$$A = \frac{\cos 2x}{\tan x + \cot x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{\sin 2x}} = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 4x\right) = \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{1}{4} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{36}$$

۹۸ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم که $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ و $1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$ است.

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 2 \rightarrow \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = 2 \rightarrow \tan x = 2$$

توجه کنید چون $1 + \cos 2x \geq 0$ است و جواب کسر برابر ۲ شده است بنابراین $\sin 2x > 0$ است.

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

می‌دانیم که $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ است.

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{5}\right) - 1 = -\frac{3}{5}$$

$$\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow \sin 2x = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\sin 2x > 0} \sin 2x = \frac{4}{5} = 0.8$$

۹۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} 1 + \cos u &= 2 \cos^2 \frac{u}{2} \\ \sin u &= 2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} \end{aligned}$$

می‌دانیم:



$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{-1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$$

می‌دانیم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۰

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ}$$

$$\rightarrow A^2 = \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ - 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\frac{1}{16}} = \frac{1 - \sin 30^\circ}{\frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{16}} = 8$$

$$\rightarrow A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$(\sin a - \cos a)^2 = 1 - \sin 2a$$

می‌دانیم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۱

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\cot a - \tan a = 2 \cot 2a$$

می‌دانیم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۲

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -(\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}) = -2 \cot x = -2\left(\frac{1}{\tan x}\right) = -2\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}, \cot a - \tan a = 2 \cot 2a$$

می‌دانیم:

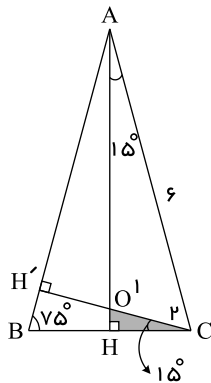
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۳

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1 \rightarrow \cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = -1 \rightarrow 2 \cot x = -1 \rightarrow \cot x = \frac{-1}{2} \rightarrow \tan x = -2$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \rightarrow \tan 2x = \frac{2(-2)}{1 - 4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۴

روش اول: دقت کنید در مثلث $\triangle OHC$ داریم $\hat{H} = 90^\circ$, $\hat{C}_1 = 15^\circ$



نکته: در مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویه 15° ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ وتر است.

$$S_{\triangle OHC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} OC \times OC = \frac{OC^2}{8}$$

از طرفی در مثلث $\triangle OAC$ طبق قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{OC}{\sin 15^\circ} = \frac{AC}{\sin \hat{O}_1} \Rightarrow \frac{OC}{\sin 15^\circ} = \frac{6}{\underbrace{\sin 15^\circ}_{\cos 15^\circ}} \Rightarrow OC = 6 \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = 6 \tan 15^\circ$$



$$\sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} \Rightarrow \tan^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{(\sqrt{3} + 2)^2} = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}}$$

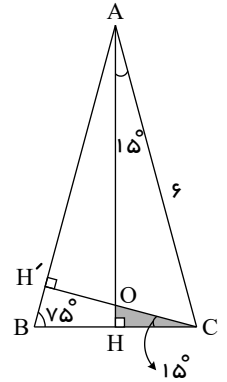
$$\Rightarrow S_{\triangle OHC} = \frac{(6 \tan 15^\circ)^2}{8} = \frac{36}{8} \times \frac{1}{(7 + 4\sqrt{3})} = \frac{9}{2(7 + 4\sqrt{3})}$$

* این روش فراتر از کتاب ریاضی تجربی است و مناسب دانش‌آموزان رشته ریاضی است.

روش دوم:

$$\triangle AHC : \sin 15^\circ = \frac{HC}{AC} \xrightarrow{AC=6} HC = 6 \sin 15^\circ$$

$$\triangle OHC : \tan 15^\circ = \frac{OH}{HC} \Rightarrow OH = HC \times \tan 15^\circ$$



$$\Rightarrow S_{\triangle OHC} = \frac{1}{2} \times (6 \sin 15^\circ) \times (HC \tan 15^\circ) = \frac{1}{2} \times 36 \sin^2 15^\circ \times \tan 15^\circ$$

می‌دانیم:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

از طرفی:

$$\tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^2}$$

پس داریم:

$$S_{\triangle OHC} = 18 \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4} \right) \times \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{9}{2(2 + \sqrt{3})^2} = \frac{9}{2(7 + 4\sqrt{3})}$$

صورت و مخرج کسر را در $\sin^2 3x$ ضرب می‌کنیم داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۵

$$f(x) = 16 \left(\frac{\frac{1}{2} \sin 6x}{\sin 3x} \right)^2$$

دقت کنید:

$$\sin 3x \cos 3x = \frac{1}{2} \sin 6x$$

$$\sin 6x \cos 6x = \frac{1}{2} \sin 12x$$

$$\sin 12x \cos 12x = \frac{1}{2} \sin 24x$$

$$\sin 24x \cos 24x = \frac{1}{2} \sin 48x$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \left(\frac{\sin^2 \frac{48\pi}{36}}{16 \sin^2 \frac{48\pi}{36}} \right)^2 = \frac{\sin^2 \frac{4\pi}{3}}{16 \sin^2 \frac{\pi}{12}}$$

از طرفی می‌دانیم $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ و $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و البته: $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{16\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}\right)} = \frac{3}{16(2-\sqrt{3})} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

ابتدا کمی عبارت را ساده کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۶

$$\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot(2\alpha)}$$

دقت کنید $\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin 2\alpha$ و $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$ ربع سوم

برای حل سؤال $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ و $\cot 2\alpha$ را نیاز داریم، به ترتیب به دست می آوریم.

$$۱) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$۲) \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$۳) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$۴) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

$$۵) \cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24}$$

$$\text{در آخر: } \frac{\sin 2\alpha - \cot \alpha}{\cot(2\alpha)} = \frac{\frac{24}{25} - \left(-\frac{4}{5}\right)}{\frac{7}{24}} = \frac{24 \times 24}{25 \times 7} = \frac{1056}{175}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۷

قبل از حل سؤال نحوه محاسبه $\sin 3\alpha$ و اتحاد مثلثاتی آن را بررسی می کنیم.

$$\sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin 3\alpha = 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \Rightarrow \sin 3\alpha = 2 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \Rightarrow \sin 3\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha$$

و اما حل سؤال:

$$f(\alpha) = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha + 2 \sin \alpha = 4 \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 6 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha = 2(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) = 2 \sin 3\alpha$$

$$f\left(\frac{41\pi}{8}\right) = 2 \sin\left(\frac{41\pi}{8}\right) = 2 \sin\left(\frac{36\pi + 5\pi}{8}\right) = 2 \sin\left(4\pi + \frac{5\pi}{8}\right) = 2 \sin \frac{5\pi}{8} = -2 \sin \frac{\pi}{8} = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۸

می دانیم:

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha, \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 8\alpha) = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 \alpha \cdot 2 \cos^2 2\alpha \cdot 2 \cos^2 4\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 4\alpha = \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \pm \frac{1}{8} \xrightarrow{x \neq k\pi} \underbrace{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}_{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{2} \underbrace{\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}_{\frac{1}{2} \sin 4\alpha} \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{4} \underbrace{\sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha}_{\frac{1}{2} \sin 8\alpha} = \frac{1}{8} \sin 8\alpha \Rightarrow \frac{1}{8} \sin 8\alpha$$

$$= \pm \frac{1}{8} \sin \alpha \Rightarrow \sin 8\alpha = \pm \sin \alpha \quad (1) \quad \sin 8\alpha = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{7} \Rightarrow \max: \frac{6\pi}{7} \\ 8\alpha = 2k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9} + \frac{\pi}{9} \Rightarrow \max: \frac{7\pi}{9} \end{cases}$$



$$(۲) \sin \lambda \alpha = -\sin \alpha \Rightarrow \sin \lambda \alpha = \sin(-\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda \alpha = 2k\pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{\lambda} \Rightarrow \max = \frac{\lambda\pi}{9} \\ \lambda \alpha = 2k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{\lambda} \Rightarrow \max = \frac{5\pi}{7} \end{cases}$$

* البته دقت کنید که $\alpha = \pi$ جواب قابل قبول برای معادله نیست سپس ماکزیمم جواب‌ها $\frac{\lambda\pi}{9}$ است.

۱۰۹ (۱) (۲) (۳) (۴) با توجه به نمودار تابع $\tan x$ ، باید $\tan a = 1$ و a در ربع اول باشد بنابراین $a = \frac{\pi}{4}$ است و $\tan b = \sqrt{3}$ و b در $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ است، پس $b = \frac{4\pi}{3}$

بنابراین $b - a = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$

۱۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴) می‌دانیم که $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$ است.

تابع $f \cdot g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f \cdot g)(x) = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

می‌دانیم دوره تناوب تابع $f(x) = a \cos bx$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است. بنابراین:

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

۱۱۱ (۱) (۲) (۳) (۴) می‌دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ بیشترین مقدار تابع، برابر $|a| + c$ است.

چون شکل فرمت خود سینوس است، $b > 0$ است.

$$\max = \sqrt{3} \rightarrow |b| + a = \sqrt{3} \rightarrow b + a = \sqrt{3}$$

صندوق در تابع $\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{3}{2} = a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{2}) \rightarrow -\frac{3}{2} = a - b \sin \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{3}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2}b \rightarrow -3 = 2a - \sqrt{3}b$$

$$\begin{cases} b + a = \sqrt{3} \\ 2a - \sqrt{3}b = -3 \end{cases} \rightarrow -2b - \sqrt{3}b = -2\sqrt{3} - 3 \rightarrow 2b + \sqrt{3}b = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\rightarrow (2 + \sqrt{3})b = 2\sqrt{3} + 3 \rightarrow b = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 6 + 6 - 3\sqrt{3}}{4 - 3} = \sqrt{3}$$

۱۱۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$y_1 = -2 \sin((a^2 + 2)x) + 3 : T_1 = \frac{2\pi}{|a^2 + 2|}$$

$$y_2 = -3 \cos 3ax - 2 : T_2 = \frac{2\pi}{|3a|}$$

$$\xrightarrow{T_1=T_2} |a^2 + 2| = |3a| \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2 = 3a \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \\ a^2 + 2 = -3a \Rightarrow a^2 + 3a + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)(a-2) = 0 \\ (a+1)(a+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -1, 1, -2, 2$$

۱۱۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$y = a + b \cos(\frac{\pi}{2} - x) = a + b \sin x$$

صندوق $\frac{-5\pi}{6}$

$$\frac{-5\pi}{6} \rightarrow 0 = a + b \sin(\frac{-5\pi}{6}) \rightarrow 0 = a - b \sin(\frac{5\pi}{6})$$

$$\rightarrow 0 = a - b \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) \rightarrow 0 = a - b \sin(\frac{\pi}{6}) \rightarrow a - \frac{b}{2} = 0 \quad (I)$$

در تابع $y = a \sin bx + c$ مقدار $\max$ تابع از رابطه $|a| + c$ به دست می‌آید و چون تابع داده شده فرمت سینوس را دارد $ab > 0$ است و چون $y(0) > 0$ است پس $a > 0$ است و در نتیجه $b > 0$ است.

$$\max = |a| + c \rightarrow 3 = |b| + a \rightarrow 3 = b + a \quad (II)$$

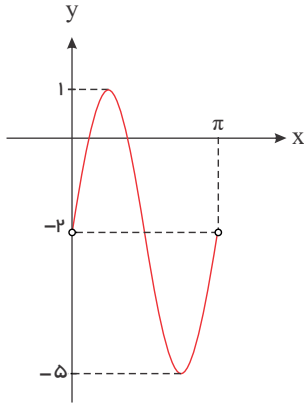


از روابط (I) و (II) مقادیر $a = 1$ و $b = 2$ حاصل می‌شوند.

پس $f(x) = 1 + 2 \sin x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۴

$$f(x) = 3 \sin 2x - 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



برای رسم نمودار تابع f کافی است که در تابع $y = \sin x$ طول‌ها را نصف کرده و سپس عرض‌ها را سه برابر کرده و شکل را دو واحد پایین آوریم که شکل روبرو به دست می‌آید.

تابع $g(x) = k$ زمانی نمودار f را در دو نقطه قطع می‌کند که: $-2 < k < 1$ یا $-5 < k < -2$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۵

دوره تناوب تابع $y = a \cos bx + c$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و کمترین مقدار آن $Min = -|a| + c$ است.

$$Min = -|a| + 2 = 0 \Rightarrow |a| = 2$$

باتوجه به نمودار، دوره تناوب این تابع برابر $\frac{5}{3}$ است؛ در نتیجه داریم:

$$\frac{5}{3}T = \frac{10}{3} \Rightarrow T = \frac{2 \times 10}{5 \times 3} = \frac{4}{3}$$

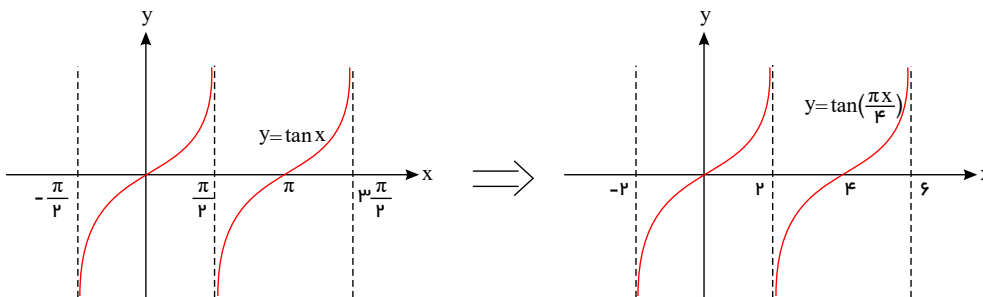
$$\Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow |ab| = |a||b| = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

از طرفی دوره تناوب این تابع برابر است با $\frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|}$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۶

برای رسم $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ از روی نمودار

$y = \tan x$ باید در نمودار $y = \tan x$ ، طول نقاط $\frac{\pi}{4}$ را بر $\frac{\pi}{4}$ تقسیم کنیم. که داریم:



پس حداکثر مقدار a برای اینکه تابع f روی دامنه‌اش یعنی بازه $(2, a)$ اکیداً صعودی باشد، برابر ۶ است.

تابع از نقطه $(0, -2)$ می‌گذرد، پس داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۷

$$f(x) = a \cos bx$$

$$(0, -2) \Rightarrow f(0) = -2 \Rightarrow a \cos 0 = -2 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = -2 \cos bx$$

با توجه به این که دوره تناوب تابع 2π است و دوره تناوب تابع $f(x) = a \cos bx + c$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است، داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$b = 1 \Rightarrow a + b = -2 + 1 = -1$$

$$b = -1 \Rightarrow a + b = -2 - 1 = -3$$

با توجه به این که $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ، هر دو مقدار ± 1 را می‌تواند اختیار کند.

در تابع $y = a \sin bx + c$ داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۸

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \text{ دوره تناوب}, \quad Max = |a| + c, \quad Min = -|a| + c$$



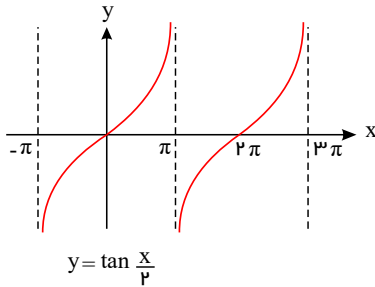
$$y = 3 \sin cx - 2 \Rightarrow \text{دوره تناوب } T = \frac{2\pi}{|c|} = \pi \Rightarrow |c| = 2 \Rightarrow c = \pm 2$$

$$y = \pi \sin(-x) + c \Rightarrow \begin{cases} \text{Max} = \pi + c \\ \text{Min} = -\pi + c \end{cases} \Rightarrow \text{Max} + \text{Min} = 2c \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \Rightarrow \text{Max} + \text{Min} = 4 \\ c = -2 \Rightarrow \text{Max} + \text{Min} = -4 \end{cases}$$

می دانیم $\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$ و $1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$ است، اکنون تابع را ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}, (\cos x \neq -1)$$

نمودار تابع f از انبساط افقی تابع $y = \tan x$ با ضریب ۲ به دست می آید:



دوره تناوب تابع $y = \tan \frac{x}{2}$ برابر با 2π است. بنابراین نمودار تابع $y = \tan \frac{x}{2}$ در بازه $(0, \pi)$ و $(\pi, 2\pi)$ صعودی است.

ابتدا ضابطه تابع داده شده را ساده می کنیم. (۱۲۰)

$$y = a + 2 \sin(\pi bx - \frac{\pi}{2}) \rightarrow y = a - 2 \sin(\frac{\pi}{2} - \pi bx) \rightarrow y = a - 2 \cos(\pi bx)$$

در تابع $y = a \cos bx + c$ دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $\text{Max} = |a| + c$ و $\text{Min} = -|a| + c$ است. دوره تناوب داده شده برابر ۶ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \rightarrow \frac{2}{|b|} = 6 \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

چون تابع داده شده کسینوس است هر دو مقدار b قابل قبول است.

$$\text{Max} = 3 \rightarrow |-2| + a = 3 \rightarrow a = 1$$

$$\text{پس: } a - b = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{یا} \quad a - b = 1 - (-\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$$

(۱۲۱)

می دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ و $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$ است و دوره تناوب تابع $f(x) = a \sin bx + c$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$f(x) = \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = -\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = -\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2(2x) = -\frac{1}{4} \sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

ضابطه مورد نظر به صورت $y = a \cos bx + c$ است که $a < 0$ می باشد و توجه کنید در این تابع $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $\text{Max} = |a| + c$ و $\text{Min} = -|a| + c$ است. (۱۲۲)

است.

$$T + \frac{T}{2} = 2\pi \Rightarrow \frac{3T}{2} = 2\pi \Rightarrow T = \frac{4\pi}{3}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Max} = 4 &\Rightarrow |a| + c = 4 \\ \text{Min} = 0 &\Rightarrow -|a| + c = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow |a| = 2 \xrightarrow{a < 0} a = -2$$

$$y = -2 \cos(\pm \frac{3}{2}x) + 2 = -2 \cos(\frac{3x}{2}) + 2$$

نمودار تابع در بازه $[0, 5]$ دو مرتبه تکرار شده است. یعنی دوره تناوب این تابع $\frac{5}{2}$ است. زیرا: (۱۲۳)

$$2T = 5 \rightarrow T = \frac{5}{2} \quad (1)$$



با توجه به ضابطه $f(x)$ ، دربارهٔ دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \tan(cx)$ می‌دانیم که $T = \frac{\pi}{|c|}$ است. پس در این جا:

$$f(x) = a \tan(b\pi x) \rightarrow T = \frac{\pi}{|b\pi|} = \frac{1}{|b|} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{1}{|b|} = \frac{5}{2} \rightarrow b = \pm \frac{2}{5}$$

با مقایسهٔ نمودار تابع داده شده و فرم اصلی $y = \tan x$ متوجه می‌شویم که نمودار تابع در یک منفی ضرب شده است.

در نتیجه a و b مختلف‌العلامت هستند. لذا گزینهٔ «۴» صحیح است.

۱۲۴ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم که $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است پس $y = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$ و می‌دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ ، دورهٔ تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $Max = |a| + c$ است.

$$Max = \frac{3}{2} \rightarrow \left| \frac{a}{2} \right| + 1 = \frac{3}{2} \rightarrow \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2} \rightarrow a = \pm 1$$

چون فاصلهٔ دو مینیمم متوالی، دورهٔ تناوب اصلی منحنی است، پس:

$$T = \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi \rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = \pi \rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

چون شکل داده شده فرمت سینوس است پس a, b هم‌علامتند، یعنی:

$$a = 1 \rightarrow b = 1 \rightarrow a + b = 2 \text{ و } a = -1 \rightarrow b = -1 \rightarrow a + b = -2$$

۱۲۵ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ است.

$$\text{پس: } f(x) = -(\cot \pi x - \tan \pi x) = -2 \cot 2\pi x = \frac{-2}{\tan 2\pi x}$$

می‌دانیم دورهٔ تناوب $y = \tan bx$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است بنابراین $T = \frac{\pi}{|2\pi|} = \frac{1}{2}$ می‌باشد.

۱۲۶ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ است.

$$f(x) = -2 + a \cos(\pi + \pi bx) \rightarrow f(x) = -2 - a \cos(b\pi x)$$

$$\text{داریم: } -1 \leq \cos(\pi bx) \leq 1 \xrightarrow{a > 0} -a \leq a \cos(\pi bx) \leq a$$

منفی ضرب می‌کنیم

$$\rightarrow -a \leq -a \cos(\pi bx) \leq a \rightarrow -2 - a \leq -2 - a \cos(\pi bx) \leq -2 + a$$

بیشترین مقدار تابع از روی شکل برابر صفر است یعنی $-2 + a = 0$ است یعنی $a = 2$ می‌باشد پس $f(x) = -2 - 2 \cos(\pi bx)$ است.

با توجه به نمودار داده شده دورهٔ تناوب تابع برابر $T = \frac{4}{3}$ است و می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $y = a \cos bx$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{4}{3} = \frac{2\pi}{|b\pi|} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{3}{2} \rightarrow b = \pm \frac{3}{2}$$

بنابراین $a \times b = \pm 3$ است.

۱۲۷ ۱ ۲ ۳ ۴ دورهٔ تناوب تابع $f(x) = a \sin bx + c$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$f(x) = 5 \sin 3\left(\frac{\pi}{2}x - c\right) = 5 \sin\left(\frac{3\pi}{2}x - 3c\right) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\left|\frac{3\pi}{2}\right|} = \frac{4}{3}$$

فاصلهٔ طولی نقاط ماکسیمم و مینیمم متوالی برابر $\frac{T}{2}$ است پس اگر از $x = \frac{1}{2}$ به اندازهٔ $\frac{T}{2}$ به سمت راست یا چپ برویم به نقطهٔ مینیمم می‌رسیم.

$$x_{Min} = x_{Max} + \frac{T}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

۱۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴ اولاً چون مقادیر تابع از نقطه‌ی $x = 0$ در حال افزایش است، بنابراین $b > 0$. از طرفی کم‌ترین مقدار تابع صفر است. در نتیجه:

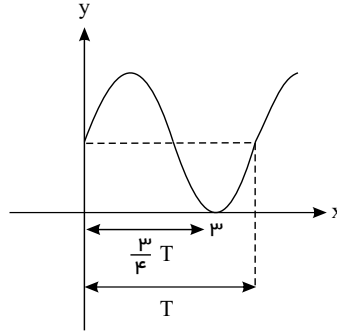
$$-1 \leq \sin b\pi x \leq 1 \Rightarrow a - 1 \leq a + \sin b\pi x \leq a + 1 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

از طرفی با توجه به شکل $T = 3$ و در نتیجه $T = 4$ است.

دورهٔ تناوب $y = \sin bx$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{1}{2}$$

پس $a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ است.



۱۲۹ با توجه به شکل، دوره تناوب تابع برابر $T = 5$ است و می‌دانیم در توابع متناوب اگر از هر نقطه روی نمودار به اندازه دوره تناوب یا مضارب صحیح از آن جلو یا عقب برویم مقدار مقدار تابع تغییر نمی‌کند.

$$128,1 = 25(5) + 3,1 \rightarrow f(128,1) = f(3,1)$$

برای پیدا کردن $f(3,1)$ باید معادله خط مشخص شده در شکل در بازه $[3, 4]$ را بنویسیم:

$$\begin{cases} A \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix} \\ B \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases} \rightarrow \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y - y_B}{x - x_B} \rightarrow \frac{y + 2}{x - 3} = \frac{-2 - 0}{3 - 4} = 2 \rightarrow y + 2 = 2x - 6 \rightarrow y = 2x - 8$$

$$\text{پس: } f(x) = 2x - 8 \rightarrow f(3,1) = 2(3,1) - 8 = -1,8$$

۱۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴

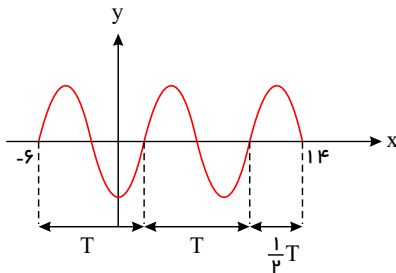
$$\text{نکته: } \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$f(x) = a \cos(\pi + bx) \Rightarrow f(x) = -a \cos bx$$

ابتدا ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم:

نمودار رسم شده، تابع را در $2,5$ دوره تناوب نشان می‌دهد، پس:

$$\Rightarrow \frac{5}{2}T = 14 - (-6) \Rightarrow \frac{5}{2}T = 20 \Rightarrow T = 8$$



$$\frac{2\pi}{|b|} = 8 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{4}$$

از طرفی دوره تناوب تابع از رابطه $\frac{2\pi}{|b|}$ به دست می‌آید، پس:

$$f(0) = -4 \Rightarrow -a \cos 0 = -4 \Rightarrow a = 4$$

از طرفی مقدار تابع در $x = 0$ برابر -4 است، پس:

در نتیجه ضابطه f به صورت $f(x) = -4 \cos(-\frac{\pi x}{4})$ یا $f(x) = -4 \cos \frac{\pi x}{4}$ در می‌آید و داریم:

$$\begin{aligned} f(-\frac{32}{3}) &= -4 \cos(\frac{\pi}{4} \times \frac{-32}{3}) = -4 \cos(\frac{-8\pi}{3}) = -4 \cos(\frac{8\pi}{3}) \\ &= -4 \cos(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = -4 \cos \frac{2\pi}{3} = -4 \times \frac{-1}{2} = 2 \end{aligned}$$

دقت کنید چون $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ، جواب سؤال برای $b = -\frac{\pi}{4}$ نیز همین است.

۱۳۱ ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = a - \cos(\frac{\pi}{2} + b\pi x) = a + \sin b\pi x$$

با توجه به نمودار، نقطه‌ی $(0, 1)$ روی نمودار قرار دارد:

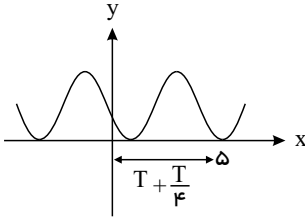
$$f(0) = 1 \Rightarrow a + \sin 0 = 1 \Rightarrow a = 1$$

از طرفی مطابق شکل زیر، دوره‌ی تناوب تابع را می‌یابیم:

$$T + \frac{T}{4} = 5 \Rightarrow \frac{5}{4}T = 5 \Rightarrow T = 4$$

دوره تناوب تابع $y = \sin ax$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|a|}$ به دست می‌آید.

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$



چون بلافاصله بعد از محور y ها نمودار در حال کاهش است، پس $b = -\frac{1}{4}$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow a + b = 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) = 0.75$$

در تابع $y = a \sin bx + c$ ، بیشترین مقدار تابع از رابطه $|a| + c$ بدست می‌آید. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۳۲)

$$|a| + c = 1 \rightarrow |a| - 1 = 1 \rightarrow |a| = 2 \rightarrow a = \pm 2$$

شکل داده شده فرمت خود سینوس را دارد بنابراین a و b هم علامتند ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که a و b هر دو مثبت هستند.

$$f(x) = 2 \sin(b\pi x) - 1 \xrightarrow{\text{صندوق}} \sin \frac{5b\pi}{3} - 1 \rightarrow \sin \frac{5b\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

مقدار سینوس برابر $\frac{1}{2}$ شده است برای x های مثبت این اتفاق اولین بار در $\frac{\pi}{6}$ و بار دوم در $\frac{5\pi}{6}$ اتفاق می‌افتد و با توجه به شکل تابع، باید $\frac{5b\pi}{3}$ برابر $\frac{5\pi}{6}$ باشد.

$$\frac{5b\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \rightarrow \frac{b}{3} = \frac{1}{6} \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

به طریق مشابه برای حالتی که a و b هر دو منفی هستند، $b = -\frac{1}{2}$ به دست می‌آید.

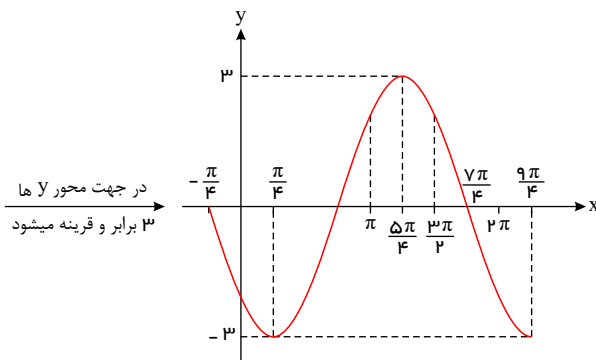
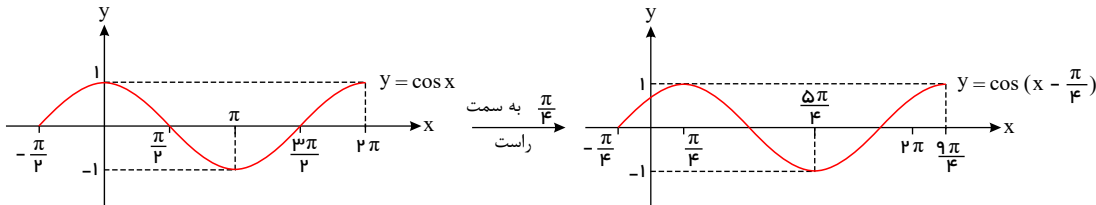
(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۳۳)

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - 2 \cos\left(\frac{7\pi}{4} + x\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) - 2 \cos\left(\frac{7\pi}{4} + x\right)$$

$$\rightarrow f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - x\right) - 2 \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4} + x\right)$$

$$\rightarrow f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow f(x) = -3 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



اگر خط $y = -1$ رسم کنیم در بازه گفته شده نمودار را در سه نقطه قطع می‌کند، پس گزینه «۴» نادرست است.

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۳۴)

$$y = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = a \cos(b\pi x)$$



از آنجا که دوره تناوب $y = a \cos bx + c$ برابر است با $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و با توجه به این که نمودار ۴ تناوب خود را طی کرده است، داریم:

$$4T = 5.5 - (-2.5) = 8 \Rightarrow T = \frac{8}{4} = 2$$

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

و از طرفی نقطه $(0, 2)$ روی نمودار قرار دارد، پس در ضابطه آن صدق می کند، یعنی:

$$2 = a \cos(0) \Rightarrow a = 2$$

که عدد ۲ در گزینه ها موجود است. $\Rightarrow a \times b = 2 \times (\pm 1) = \pm 2$

ابتدا ضابطه تابع را ساده تر کنیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۵**

$$y = a \sin \pi \left(\frac{1}{2} - bx \right) + c \Rightarrow y = a \sin \left(\frac{\pi}{2} - b\pi x \right) + c \Rightarrow y = a \cos b\pi x + c$$

فاصله افقی بین مینیمم و ماکزیمم متوالی برابر $\frac{T}{2}$ است. پس داریم:

$$\frac{T}{2} = 2 \Rightarrow T = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

هردوی $\pm \frac{1}{2}$ قابل قبول است، زیرا $\cos(-x) = \cos x$ مطابق شکل ماکسیمم تابع ۲ و مینیمم تابع ۶- است. پس:

$$\left. \begin{aligned} Max &= 2 \rightarrow |a| + c = 2 \\ Min &= -6 \rightarrow -|a| + c = -6 \end{aligned} \right\} \rightarrow c = -2, a = \pm 4$$

شکل داده شده، فرمت تابع $\cos x$ را دارد. پس فقط $a = 4$ صحیح است و داریم:

$$f(x) = 4 \cos \frac{\pi}{2} x - 2 \xrightarrow{x=\frac{1}{3}} f\left(\frac{1}{3}\right) = 4 \cos \left(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{3} \right) - 2 = 4 \cos \frac{\pi}{6} - 2$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = 4 \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) - 2 = 4 \left(-\cos \frac{\pi}{6} \right) - 2 = -4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = -2\sqrt{3} - 2$$

ابتدا π را در پرانتز ضرب می کنیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۶**

$$f(x) = a \cos \left(\frac{3\pi}{2} + b\pi x \right) + c = a \sin(b\pi x) + c$$

با توجه به این که فاصله طولی نقطه ماکسیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دوره تناوب است، پس:

$$T = 2 \times \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \right) = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

و همچنین از نقاط $\frac{3}{2}$ و $\frac{5}{2}$ می توانیم برای پیدا کردن a و c استفاده کنیم.

۵	۳
۲	۲
-۳	۱

حالت اول: $b = 1$

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= 1 \Rightarrow a \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + c = 1 \Rightarrow -a + c = 1 \\ f\left(\frac{5}{2}\right) &= -3 \Rightarrow a \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + c = -3 \Rightarrow a + c = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

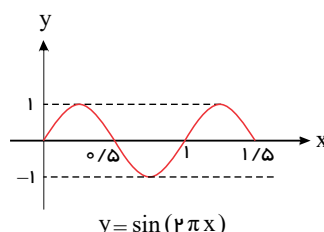
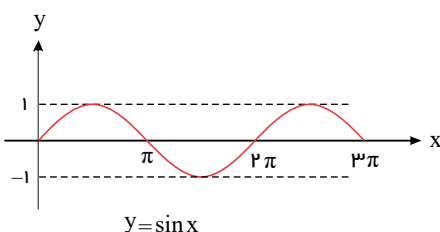
حالت دوم: $b = -1$

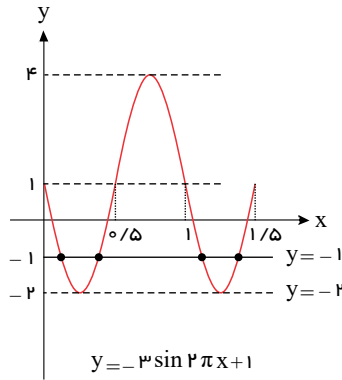
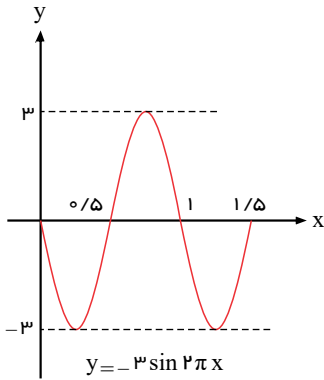
$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= 1 \Rightarrow a + c = 1 \\ f\left(\frac{5}{2}\right) &= -3 \Rightarrow -a + c = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

پس در هر دو حالت $abc = 2$ است.

برای رسم تابع $y = -3 \sin(2\pi x) + 1$ ، ابتدا نمودار $y = \sin x$ را در بازه $[0, 3\pi]$ رسم می کنیم. سپس طول نقاط دامنه تابع $y = \sin x$ را بر 2π تقسیم کرده تا شکل $y = \sin(2\pi x)$ به دست آید. در مرحله

آخر منحنی را یک واحد به بالا می بریم تا تابع $y = -3 \sin(2\pi x) + 1$ حاصل شود. نمودار این تابع در چهار نقطه خط $y = -1$ را قطع می کند.





ابتدا ضابطه تابع داده شده را ساده می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۸

$$y = a \sin\left(\frac{3\pi}{2} + b\pi x\right) \rightarrow y = -a \cos(b\pi x)$$

در تابع $y = a \cos bx + c$ دوره تناوب از رابطه $T = \frac{2\pi}{|b|}$ به دست می‌آید و ماکسیم آن از رابطه $Max = |a| + c$ به دست می‌آید.

در فاصله $[0, 3]$ شکل دوبار تکرار شده است، پس:

$$2T = 3 \rightarrow T = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{3}{2} \rightarrow |b| = \frac{4}{3} \rightarrow b = \frac{4}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$Max = 3 \rightarrow |-a| + 0 = 3 \rightarrow |a| = 3 \rightarrow a = 3, a = -3$$

چون شکل داده شده فرمت قرینه کسینوس را دارد باید ضریب کسینوس منفی باشد بنابراین $a = 3$ است.

$$a + b = \begin{cases} 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3} \\ 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

بنابراین کمترین مقدار $a + b$ برابر $\frac{5}{3}$ است.

می‌دانیم دوره تناوب تابع $y = a \cos bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. از روی شکل مشخص است که دوره تناوب تابع برابر 4π است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۹

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow 2 = \frac{1}{|m|} \rightarrow |m| = \frac{1}{2} \rightarrow m = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}$$

چون $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ است فرقی نمی‌کند که $m = \frac{1}{2}$ یا $m = -\frac{1}{2}$ باشد.

$$y = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \rightarrow y\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{1}{2} \times \frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3}$$

$$\rightarrow y\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

می‌دانیم دوره تناوب تابع $y = a \sin bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. از روی شکل مشخص است که دوره تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{3}$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۰

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow |m| = 3 \rightarrow m = 3, m = -3$$

از طرفی تابع در همسایگی راست $x = 0$ نزولی است پس $m > 0$ است یعنی $m = 3$ قابل قبول است.

$$y = 1 - \sin 3x \rightarrow y\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1 - \sin \frac{7\pi}{2} = 1 - \sin \frac{3\pi}{2} = 1 - (-1) = 2$$

$$= 1 - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \rightarrow y = a + b \cos x$$

در تابع $y = a \cos bx + c$ می‌دانیم که $Max = |a| + c$ است.

$$Max = 3 \rightarrow |b| + a = 3 \xrightarrow{\text{شکل فرمت قرینه کسینوس را دارد}} -b + a = 3$$

پس $b < 0$ است

$$\frac{7\pi}{3} \rightarrow 0 = a + b \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) \rightarrow 0 = a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow 0 = a + b \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow 0 = a + \frac{b}{2} \rightarrow 2a + b = 0$$



پس : $\begin{cases} -b+a=3 \\ 2a+b=0 \end{cases} \rightarrow a=1, b=-2$

در تابع $y = a \sin bx + c$ می‌دانیم که $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $Max = |a| + c$ و $Min = -|a| + c$ است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴۲)

$$T = \frac{9\pi}{2} - \left(\frac{-3\pi}{2}\right) = 6\pi \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} Max = 1 &\rightarrow |a| + c = 1 \\ Min = -3 &\rightarrow -|a| + c = -3 \end{aligned} \right\} \rightarrow c = -1, |a| = 2 \rightarrow a = 2, a = -2$$

چون شکل فرمت قرینه سینوس را دارد پس $ab < 0$ است بنابراین $\frac{a}{b} = -6$ است.

در تابع $y = a \sin bx + c$ مقدار ماکسیم تابع از رابطه $Max = |a| + c$ به دست می‌آید. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴۳)

شکل فرمت قرینه سینوس
است پس $b < 0$ است.

$$Max = \frac{3}{2} \rightarrow |b| + a = \frac{3}{2} \rightarrow -b + a = \frac{3}{2}$$

صدق
است.

$$\frac{\pi}{2} \rightarrow 0 = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow 0 = a + b \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} -b + a = \frac{3}{2} \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow 3a = \frac{3}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -1$$

در تابع $y = a \sin bx + c$ می‌دانیم که $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $Max = |a| + c$ و $Min = -|a| + c$ است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴۴)

$$T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{4\pi}{6} \rightarrow |b| = 3 \rightarrow b = 3, b = -3$$

$$\left. \begin{aligned} Max = 1 &\rightarrow |a| + c = 1 \\ Min = -3 &\rightarrow -|a| + c = -3 \end{aligned} \right\} \rightarrow c = -1, |a| = 2 \rightarrow a = 2, a = -2$$

شکل فرمت سینوس را دارد یعنی $ab > 0$ است و بدون دانستن این موضوع هم گزینه اول انتخاب می‌شد.

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴۵)

$$\sin^2 x = \sin x \rightarrow \sin x(\sin x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین این معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای ۴ ریشه است.

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴۶)

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 3x = \cot x \rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha} 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

کسری برابر صفر است که صورتش صفر باشد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴۷)

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \rightarrow \sin 3x = -\sin 2x \rightarrow \sin 3x = \sin(-2x)$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} 3x = 2k\pi - 2x \rightarrow 5x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \\ \xrightarrow{x=2k\pi+\pi-\alpha} 3x = 2k\pi + \pi - 2x \rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

غرض (مخرج را صفر می‌کند)

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴۸)

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x = 3 \Rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \cos x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارت‌اند از: $-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$

توجه کنید اگر $\sin^2 x = \sin^2 \alpha$ باشد آنگاه $x = k\pi \pm \alpha$ است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴۹)

$$\sin^2 x + \cos^2 3x = 1 \rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 3x \rightarrow \sin^2 3x = \sin^2 x$$

$$\rightarrow 3x = k\pi \pm x \rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{4} \end{cases}$$

این معادله پنج جواب $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ در بازه داده شده دارد.



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۰

می‌دانیم: $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$

$$\sin x(1 + \sin x) = \cos^2 x \rightarrow \sin x + \sin^2 x = \cos^2 x \rightarrow \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\rightarrow \cos 2x = \sin x \rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

جواب‌های $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ و $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ را نیز شامل می‌شود پس جواب کلی معادله به صورت $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۱ می‌دانیم $\tan a + \cot a = \frac{1}{\sin a \cos a}$ است.

$$\sin x(\tan x + \cot x) = 1 \rightarrow \sin x \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right) = 1 \rightarrow \frac{1}{\cos x} = 1 \rightarrow \cos x = 1$$

توجه کنید در نقاطی که $\cos x = 1$ و $\sin x = 0$ است و مخرج را صفر می‌کند پس معادله جواب حقیقی ندارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۲

$$\tan 3x = \frac{1}{\tan\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)} = \cot\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \left(3x + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha} 3x = k\pi + \frac{\pi}{6} - 3x \Rightarrow 6x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{12}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۳

$$\cos 3x = \cos 2x \begin{cases} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} 3x = 2k\pi + 2x \rightarrow x = 2k\pi \\ \xrightarrow{x=2k\pi-\alpha} 3x = 2k\pi - 2x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

توجه کنید تمام جواب‌های $x = 2k\pi$ در $x = \frac{2k\pi}{5}$ قرار دارند پس جواب معادله به صورت $x = \frac{2k\pi}{5}$ است و جواب‌های معادله در بازه $(\pi, 3\pi)$ به صورت $\frac{14\pi}{5}, \frac{12\pi}{5}, \frac{10\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}$ است.

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{6\pi}{5} + \frac{8\pi}{5} + \frac{10\pi}{5} + \frac{12\pi}{5} + \frac{14\pi}{5} = \frac{50\pi}{5} = 10\pi$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۴ می‌دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$3 \sin x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \rightarrow -3 \sin x \cos x = 1 \rightarrow -3\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) = 1 \rightarrow -3 \sin 2x = 1 \rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

به k عدد می‌دهیم. $x = \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$ مجموع جواب‌ها $\frac{60\pi}{12} = 5\pi$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۵

$$\cos 3x + \cos x = 0 \rightarrow \cos 3x = -\cos x \rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x)$$

$$\xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

توجه کنید چون $\cos x \neq 0$ است پس جواب $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ قابل قبول نمی‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۶

$$\sin^2 x + \cos^2 3x = 1 \Rightarrow \cos^2 3x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 3x = \cos^2 x$$

می‌دانیم اگر $\cos^2 x = \cos^2 \alpha$ باشد، آن‌گاه $x = k\pi \pm \alpha$ است.

$$3x = k\pi \pm x \rightarrow \begin{cases} 3x = k\pi + x \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \rightarrow 0, \frac{\pi}{2}, \pi \\ 3x = k\pi - x \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

در کل معادله ۵ جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد.



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۷

$$\frac{3}{2} \cos x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} \cos x - (1 - \cos^2 x) = 0$$

$$\frac{3}{2} \cos x - 1 + \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x + \frac{3}{2} \cos x - 1 = 0$$

$$\Delta = \frac{9}{4} + 2 = \frac{25}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{-\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -2 \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۸

می‌دانیم $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ و $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ است.

$$\sin x \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \sin x \cos x - \cos^2 x = -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} 2 \sin x \cos x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow \sin 2x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 1 \Rightarrow \tan 2x = \tan \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha} 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۹ می‌دانیم که $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ است.

$$(\cos 3x)(\cos \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \cos^2 x \rightarrow (\cos 3x)(\frac{-1}{2}) = \frac{1}{2} - \cos^2 x$$

$$\xrightarrow{\times 2} -\cos 3x = 1 - 2 \cos^2 x \rightarrow \cos 3x = 2 \cos^2 x - 1 \rightarrow \cos 3x = \cos 2x$$

$$\xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \rightarrow x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi - 2x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \rightarrow \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5} \end{cases}$$

بنابراین ۴ جواب به دست می‌آید.

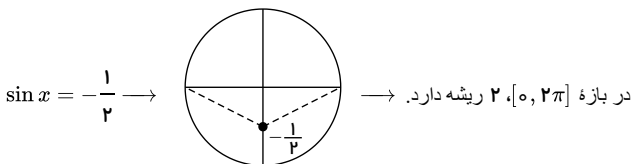
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶۰ می‌دانیم $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ است.

$$\frac{\cos 2x + \sin x - 3}{\sin x - 1} = 3 \rightarrow \cos 2x + \sin x - 3 = 3 \sin x - 3$$

$$\rightarrow \cos 2x + \sin x = 0 \rightarrow 1 - 2 \sin^2 x + \sin x = 0 \rightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

جمع ضرایب صفر است پس یک ریشه معادله $\sin x = 1$ و ریشه دیگر $\sin x = -\frac{1}{2}$ است.

غرض (مخرج را صفر می‌کند.) $\sin x = 1$



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶۱

می‌دانیم $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ است.

$$\cos 5x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos 5x = \cos 2x \xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} \begin{cases} 5x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \\ 5x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{7} \xrightarrow{k=2} x = \frac{4\pi}{7} \end{cases}$$

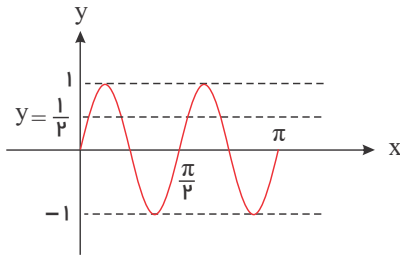
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶۲

می‌دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ و $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$ است.

$$\sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x = \frac{1}{12} \Rightarrow \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2(2x) = \frac{1}{12} \Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{3}$$

پس معادله به فرم $\sin 4x = \frac{1}{3}$ در می‌آید. نمودار $y = \sin 4x$ از انقباض افقی نمودار $y = \sin x$ به ضریب ۴ به دست می‌آید. در این صورت مطابق شکل زیر، نمودارهای $y = \sin 4x$ و $y = \frac{1}{3}$ در ۴ نقطه تلاقی دارند. پس معادله دارای ۴ ریشه است.



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶۳

$$\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{5}{8} - \cos^2 x \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{2} = \frac{5}{8} - (1 - \sin^2 x) \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{2} = \frac{5}{8} - 1 + \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{2} - \sin^2 x = -\frac{3}{8} \Rightarrow -\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{3}{8} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

می‌دانیم اگر $\sin^2 x = \sin^2 \alpha$ باشد، آن گاه $x = k\pi \pm \alpha$ است.

$$x = k\pi \pm \alpha \rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای ۴ جواب است.

می‌دانیم که $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶۴

$$2\sin^2 x = 1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$$

$$x = 2k\pi \pm \alpha \rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + 2x \rightarrow \text{امکان ندارد} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - 2x \rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{16} \end{cases}$$

می‌دانیم $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2a$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶۵

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1$$

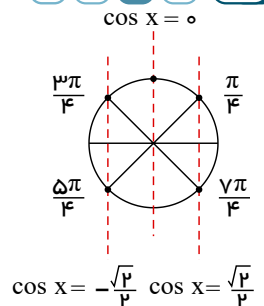
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \\ \sin 2x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi$$

$$2\cos^2 x = \cos x \rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\cos^2 x - 1 = 0 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶۶





با توجه به شکل این معادله سه جواب کلی به صورت $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$ و $x = k\pi + \frac{5\pi}{4}$ دارد بنابراین مجموعه مقادیر i را می توان به صورت $\{1, 2, 3\}$ در نظر گرفت.

می دانیم: $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$, $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, $1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶۷

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin 2x \rightarrow (\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}) (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 - \sin 2x$$

$$\rightarrow \cos 2x = 1 - \sin 2x \rightarrow \sin 2x = 1 - \cos 2x \rightarrow 2 \sin x \cos x = 2 \sin^2 x$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 0 \rightarrow 2 \sin x (\cos x - \sin x) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos x = \sin x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین معادله در بازه‌ی داده شده دارای پنج جواب است.

می دانیم $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶۸

$$\frac{\frac{1}{2} \sin 2x}{1 + \tan^2 x} + 3 \cos 2x = 0 \rightarrow \frac{\frac{1}{2} \sin 2x}{\frac{1}{\cos^2 x}} + 3 \cos 2x = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x \cos^2 x + 3 \cos 2x = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} (\sin 2x \cos x) + 3 \cos 2x = 0 \rightarrow \frac{1}{2} (\sin 2x) + 3 \cos 2x = 0$$

$$\rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \cos 2x = 0 \rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos 2x = 0$$

$$\rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos 2x - 2 = 0 \xrightarrow{\cos 2x = A} 2A^2 - 3A - 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \frac{3+5}{4} = 2 \text{ غلط} \\ \cos 2x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع } k \text{ به عدد می دهیم}} \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \rightarrow \frac{12\pi}{3} = 4\pi$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶۹

می دانیم $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$ است.

$$\tan 2x = 3 \tan x \rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 3 \tan x \rightarrow 2 \tan x = 3 \tan x (1 - \tan^2 x) \rightarrow 2 \tan x = 3 \tan x - 3 \tan^3 x \rightarrow 3 \tan^3 x - \tan x = 0$$

$$\rightarrow \tan x (3 \tan^2 x - 1) = 0 \rightarrow \tan x = 0 \text{ یا } 3 \tan^2 x - 1 = 0$$

$$\tan x = 0 \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \rightarrow \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \rightarrow x = \pi, 2\pi \text{ جواب ۲}$$

$$3 \tan^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan(\pm \frac{\pi}{6}) \xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha} x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \pi + \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6} \text{ جواب ۵}$$

در کل معادله در بازه $(0, \frac{5\pi}{2})$ دارای ۷ جواب است.

می دانیم $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$ و $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۰

$$\cos 2x + \cos^2 x + 4 \sin x = 3 \rightarrow 1 - 2 \sin^2 x + 1 - \sin^2 x + 4 \sin x = 3$$

$$\rightarrow 3 \sin^2 x - 4 \sin x + 1 = 0 \xrightarrow{\sin x = A} 3A^2 - 4A + 1 = 0$$



$$a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} A=1 \rightarrow \sin x=1 \rightarrow x=\frac{\pi}{2} \\ A=\frac{c}{a}=\frac{1}{3} \rightarrow \sin x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

در بازه $[0, \pi]$ دو جواب مکمل دارد.

پس مجموع جواب‌ها برابر $\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi$ است.

$$1 + \cos 2a = 2\cos^2 a \quad \text{می‌دانیم: } \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{171}$$

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos 2x + 1 + \cos 2x = 0 \rightarrow 2\cos 2x = -1 \rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{172}$$

$$2\sin a \cos a = \sin 2a, \quad \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 \rightarrow 2\sin x \cos x = 1 - 2\cos^2 x$$

$$\rightarrow 2\sin x \cos x = -(2\cos^2 x - 1) \rightarrow \sin 2x = -\cos 2x$$

طرفین را بر $\cos 2x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\rightarrow \tan 2x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \quad \text{می‌دانیم: } \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{173}$$

$$\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \rightarrow 2\sin x \cos x + \sin x = 0 \rightarrow \sin x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \xrightarrow{k=0,1,2} x = 0, \pi, 2\pi \\ 2\cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=0} x = \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=1} x = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{بنابراین مجموع جواب‌ها برابر } 5\pi = \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} + \pi + 0 \text{ است.}$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{174}$$

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0 \rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$$

$$\rightarrow 2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x=A} 2A^2 - 3A - 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3+5}{4} = 2 \rightarrow (-1 \leq \cos x \leq 1) \text{ امکان ندارد} \\ \cos x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\sin \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u \quad \text{می‌دانیم که } \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{175}$$

$$2\sin 3x \cos 3x = 1 \rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\sin 6x\right) = 1 \rightarrow 2\sin 6x = 1 \rightarrow \sin 6x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \\ x=2k\pi+\pi-\alpha \end{cases}} \begin{cases} 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{36} \\ 6x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|cc} k & 0 & 1 \\ \hline x & \frac{\pi}{36}, \frac{5\pi}{36} & \frac{13\pi}{36}, \frac{17\pi}{36} \end{array}$$

بنابراین معادله در بازه داده شده دارای ۴ جواب است.

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{176}$$

$$\cos 3x + \cos x = 0 \rightarrow \cos 3x = -\cos x \rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} 3x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \xrightarrow{x=2k\pi-\alpha} 3x = 2k\pi - \pi + x \rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

چون $\cos x \neq 0$ است پس جواب $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ قابل قبول است.

$$\text{این تست با عددگذاری حل می‌شود. } x = 0 \text{ در معادله صدق می‌کند } \left(\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} = \cos 0\right) \text{ بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند. } \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{177}$$



$x = \frac{\pi}{3}$ در معادله صدق نمی‌کند ($\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{2\pi}{3} \neq \cos \frac{2\pi}{3}$) بنابراین گزینه دوم نیز حذف می‌شود و جواب گزینه اول یعنی $x = \frac{2k\pi}{3}$ است.

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۸

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4}) \rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - (x + \frac{\pi}{4})) \rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(-x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - x + \frac{\pi}{4} \rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi + x - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

غ ق (با توجه به شرط)

روش دوم: اگر $k = 0$ باشد گزینه اول و دوم $x = 0$ را می‌دهند که در معادله صدق نمی‌کند اگر $k = 1$ باشد گزینه سوم $x = \frac{\pi}{3}$ را می‌دهد که در معادله صدق نمی‌کند بنابراین گزینه چهارم صحیح است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۹

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 3x = \cot x \rightarrow \tan 3x = \tan(\frac{\pi}{2} - x) \xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha} 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \rightarrow \begin{array}{c|cccc} k & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \\ \hline x & \frac{9\pi}{8} & \frac{11\pi}{8} & \frac{13\pi}{8} & \frac{15\pi}{8} \end{array} \rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{48\pi}{8} = 6\pi$$

می‌دانیم $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ پس داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۰

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x (\cos^2 x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} 0, \pi, 2\pi \\ \cos^2 x = -1 \rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

معادله دوم نیز سه جواب دارد ($\frac{\pi}{3}$ و π و $\frac{5\pi}{3}$) اما جواب π در هر دو معادله به دست آمد و تکراری است. پس در کل معادله فوق ۵ جواب ($0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$) را خواهد داشت.

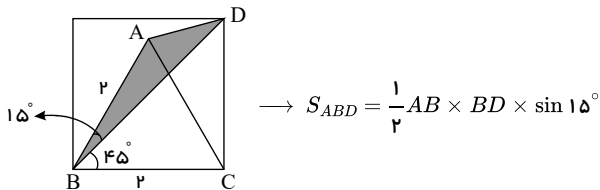
مساحت متوازی الاضلاع از نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه بین دو قطر به دست می‌آید. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۱

قطرها را x و $2x$ در نظر می‌گیریم:

$$S = \frac{1}{2}(x)(2x) \sin 30^\circ \Rightarrow 32 = \frac{1}{2}(2x^2)(\frac{1}{2}) \Rightarrow 32 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$$

چون مثلث ABC متساوی الاضلاع است، پس $AB = BC = 2$ می‌باشد. به علاوه BD قطر مربع و برابر با $2\sqrt{2}$ است. زاویه ABD برابر با ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۲

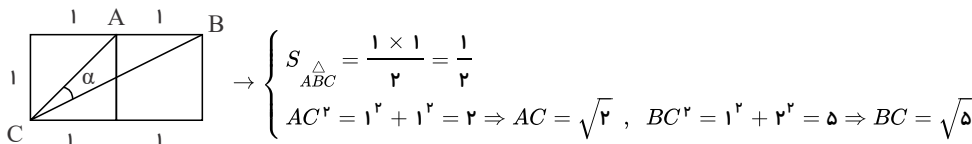
$15^\circ = 45^\circ - 60^\circ$ است. پس:



$$\rightarrow S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \times BD \times \sin 15^\circ$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۳



$$\rightarrow \begin{cases} S_{\triangle ABC} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2} \\ AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}, BC^2 = 1^2 + 2 = 5 \Rightarrow BC = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CA \times CB \times \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{10} \sin \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

مساحت مثلث از نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بینشان به دست می‌آید. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۴

$$\sin 12^\circ = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = 4 \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times a \times \sin 120^\circ \right) = 18\sqrt{3} \Rightarrow S = 6a\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \Rightarrow a = 3$$

$$\text{قطر} = 2a = 6$$

مساحت هر مثلث برابر با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۸۵)

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \theta \Rightarrow 6 = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 4 \sin \theta \Rightarrow 6 = 6\sqrt{2} \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \theta = 45^\circ \text{ یا } 135^\circ$$

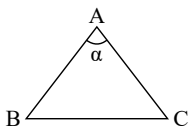
چون θ را 75° کاهش داده‌ایم، پس $\theta = 135^\circ$ قابل قبول است.

$$\theta' = 135^\circ - 75^\circ = 60^\circ, \quad a' = \sqrt{2}a = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6, \quad b' = \sqrt{2}b = \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$$

$$S' = \frac{1}{2}a'b' \sin \theta' = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{2} \sin 60^\circ = 12\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{6} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{6\sqrt{6}}{6} = \sqrt{6}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۸۶)

توجه کنید که همواره داریم:

نکته:  $\rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \alpha$

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A'B' \cdot A'C' \cdot \sin 2\theta}{\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \theta} = \frac{a \times 3b \sin 2\theta}{\sqrt{6}a \times b \sin \theta} = \frac{3 \times 2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{6} \sin \theta} = \frac{6}{\sqrt{6}} \cos \theta$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 1 + (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

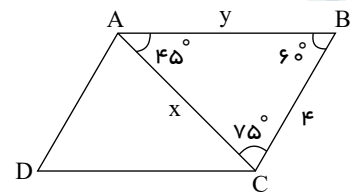
θ باید حاده باشد، زیرا در غیر این صورت 2θ نمی‌تواند زاویه یک مثلث باشد، پس داریم:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{6}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاویه $\hat{CAB} = 45^\circ$ است چرا که مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ABC برابر 180° می‌باشد. مساحت مثلث ABC را به کمک رابطه مساحت می‌نویسیم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۸۷)

$$S = \frac{1}{2}xy \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times y \times \sin 60^\circ \rightarrow x \sin 45^\circ = 4 \sin 60^\circ$$

$$\rightarrow x \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = 4 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4 \frac{\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$$

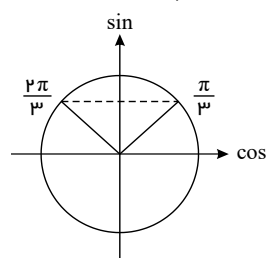


برای آنکه گلوله قبل از برخورد به زمین به دیوار برخورد کند، باید فاصله افقی طی شده آن بزرگ‌تر از $5\sqrt{3}$ باشد، پس داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۸۸)

$$d > 5\sqrt{3} \Rightarrow \frac{v^2 \sin 2\alpha}{1.0} > 5\sqrt{3} \xrightarrow{v=1.0} \sin 2\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

چون α زاویه حاده است، پس 2α از 0 تا π می‌تواند باشد. سینوس زاویه‌های $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ در این بازه برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. طبق دایره مثلثاتی:

$$\frac{\pi}{3} < 2\alpha < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$$



به‌ازای $\alpha = \frac{\pi}{6}$ و $\alpha = \frac{\pi}{3}$ گلوله پای دیوار فرود می‌آید و به‌ازای $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ گلوله بالاتر از سطح زمین به دیوار برخورد می‌کند.



$$S = \frac{1}{2}(12)(8\sqrt{3})(\sin 60^\circ) = (48\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 24 \times 3 = 72$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴

۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴

۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴
۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۰۸	۱	۲	۳	۴
۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۱۹	۱	۲	۳	۴
۱۲۰	۱	۲	۳	۴
۱۲۱	۱	۲	۳	۴
۱۲۲	۱	۲	۳	۴
۱۲۳	۱	۲	۳	۴

۱۲۴	۱	۲	۳	۴
۱۲۵	۱	۲	۳	۴
۱۲۶	۱	۲	۳	۴
۱۲۷	۱	۲	۳	۴
۱۲۸	۱	۲	۳	۴
۱۲۹	۱	۲	۳	۴
۱۳۰	۱	۲	۳	۴
۱۳۱	۱	۲	۳	۴
۱۳۲	۱	۲	۳	۴
۱۳۳	۱	۲	۳	۴
۱۳۴	۱	۲	۳	۴
۱۳۵	۱	۲	۳	۴
۱۳۶	۱	۲	۳	۴
۱۳۷	۱	۲	۳	۴
۱۳۸	۱	۲	۳	۴
۱۳۹	۱	۲	۳	۴
۱۴۰	۱	۲	۳	۴
۱۴۱	۱	۲	۳	۴
۱۴۲	۱	۲	۳	۴
۱۴۳	۱	۲	۳	۴
۱۴۴	۱	۲	۳	۴
۱۴۵	۱	۲	۳	۴
۱۴۶	۱	۲	۳	۴
۱۴۷	۱	۲	۳	۴
۱۴۸	۱	۲	۳	۴
۱۴۹	۱	۲	۳	۴
۱۵۰	۱	۲	۳	۴
۱۵۱	۱	۲	۳	۴
۱۵۲	۱	۲	۳	۴
۱۵۳	۱	۲	۳	۴
۱۵۴	۱	۲	۳	۴
۱۵۵	۱	۲	۳	۴
۱۵۶	۱	۲	۳	۴
۱۵۷	۱	۲	۳	۴
۱۵۸	۱	۲	۳	۴
۱۵۹	۱	۲	۳	۴
۱۶۰	۱	۲	۳	۴
۱۶۱	۱	۲	۳	۴
۱۶۲	۱	۲	۳	۴
۱۶۳	۱	۲	۳	۴
۱۶۴	۱	۲	۳	۴



۱۶۵	۱	۲	۳	۴
۱۶۶	۱	۲	۳	۴
۱۶۷	۱	۲	۳	۴
۱۶۸	۱	۲	۳	۴
۱۶۹	۱	۲	۳	۴
۱۷۰	۱	۲	۳	۴
۱۷۱	۱	۲	۳	۴

۱۷۲	۱	۲	۳	۴
۱۷۳	۱	۲	۳	۴
۱۷۴	۱	۲	۳	۴
۱۷۵	۱	۲	۳	۴
۱۷۶	۱	۲	۳	۴
۱۷۷	۱	۲	۳	۴
۱۷۸	۱	۲	۳	۴

۱۷۹	۱	۲	۳	۴
۱۸۰	۱	۲	۳	۴
۱۸۱	۱	۲	۳	۴
۱۸۲	۱	۲	۳	۴
۱۸۳	۱	۲	۳	۴
۱۸۴	۱	۲	۳	۴
۱۸۵	۱	۲	۳	۴

۱۸۶	۱	۲	۳	۴
۱۸۷	۱	۲	۳	۴
۱۸۸	۱	۲	۳	۴
۱۸۹	۱	۲	۳	۴